

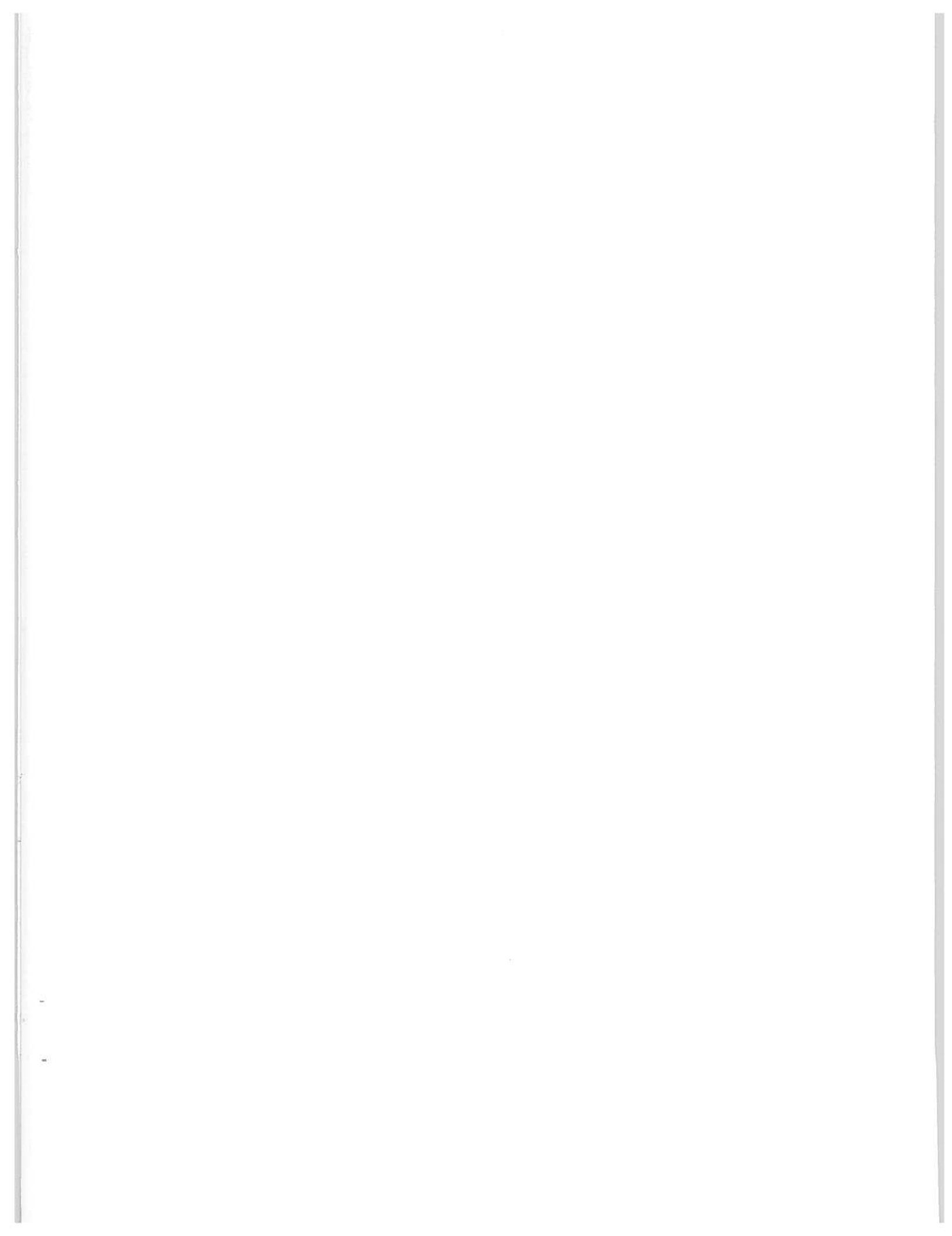


بانک سوال المیاد ریاضی



پایه هشتم

مولفان: کمیته علمی المیاد ریاضی مبتکران





بانک سوال
المپیاد
ریاضی

پایه هشتم

تألیف : گروه مولفان

سرشناسه : بانک سوال المپیاد ریاضی - هشتم
عنوان و پدیدآور : گروه مولفان
مشخصات نشر : تهران : مبتکران : ۱۳۹۸
مشخصات ظاهری : ۱۸۴ ص. : مصور
شابک : ۹-۲۴۶۹-۰۷-۹۶۴-۹۷۸
یادداشت : فهرست نویسی براساس اطلاعات فیپا
موضوع : آموزش متوسطه--آموزش و آزمون
شماره کتابشناسی ملی : ۶۰۱۰۷۵۲



مبتکران (پروانه نشر: ۱۶۷/۱۰۲)

نام کتاب: بانک سوال المپیاد ریاضی - هشتم
مؤلف: گروه مولفان
نوبت چاپ: اول - ۱۳۹۸
شمارگان: ۱۰۰۰
طراحی جلد: شهرام ساوالانیان
تایپ و صفحه آرایی: فاطمه محمدی آندرس، مریم گودرزی
گرافیک: مهسا بیدمشکی
رسامی: زینب آجورلو
چاپ: سهند
قیمت: ۴۸۰۰۰ تومان



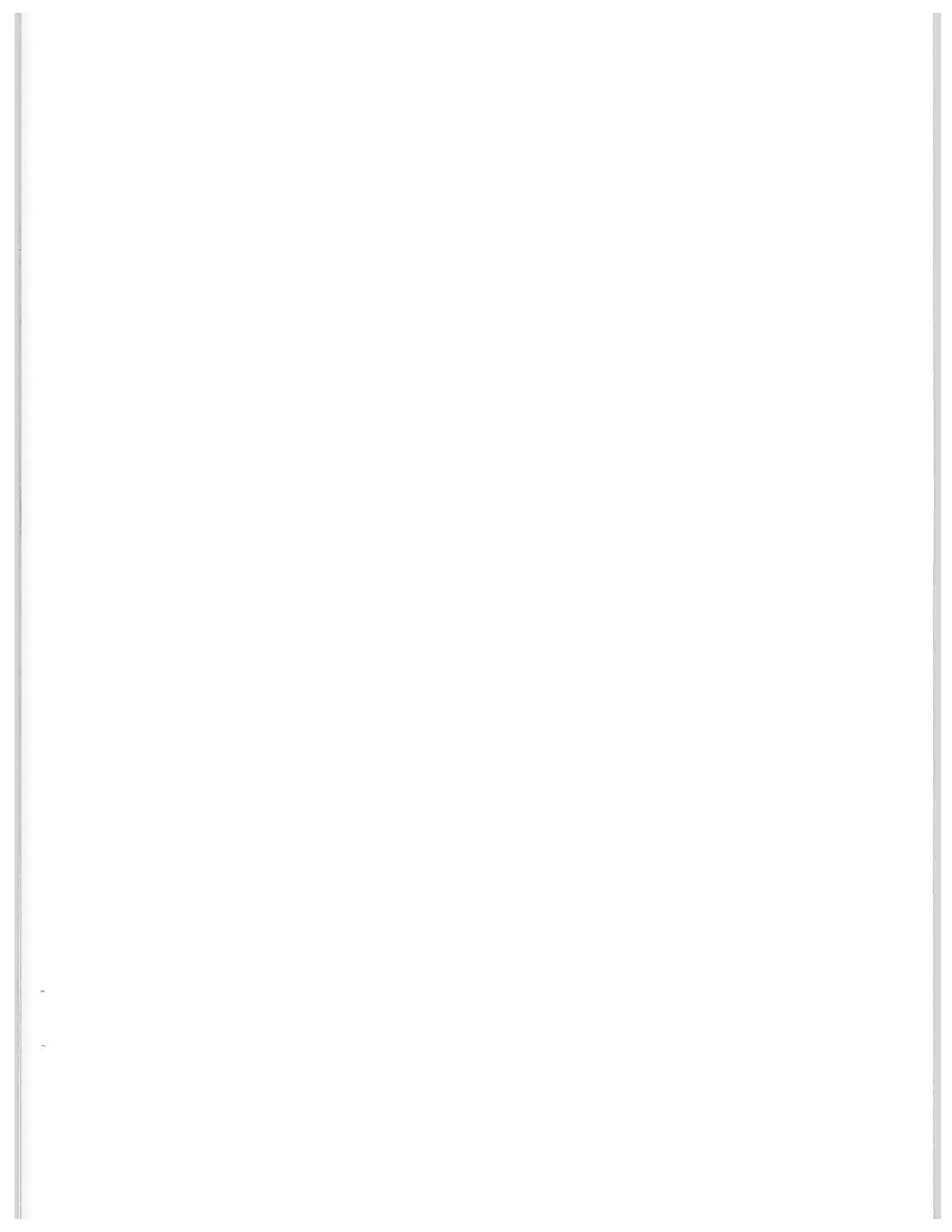
مؤلفان:

سارا ارشاد منش - حسن باطنی - حمیدرضا بیات - زهره پندی - فرخنده ترابی - کیهان خجسته
مجتبی خمایی ابدی - مرتضی خمایی ابدی - خسرو داوودی - کبری دلشاد - حمیدرضا زیارتی - امیررضا عرب
سیامک قادر - حمید کاملی - کیان کریمی خراسانی - مجید منشوری

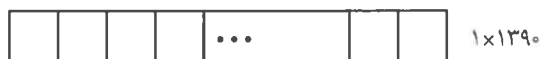
مقدمه

مبتکران؛ بابیش از ۳۰ سال فعالیت آموزشی، علمی و فرهنگی در کشور، توانمندسازی و مهارت افزایی دانش‌آموزان سرزمین‌مان را جز اهداف مهم و اثرگذارش قرار داده است. در همین راستا در سال تحصیلی ۹۰-۱۳۸۹ بر آن شدیم برای شناسایی و کشف استعدادهای علمی و توانایی‌های فردی ریاضیات نوجوانان کشورمان، اقدام به برگزاری مسابقه ملی با استانداردهای جهانی کنیم. در طول ۹ دوره المپیاد ریاضی نوجوانان ایران که منجر به حضور دانش‌آموزان و مدارس علمی و توانای کشورمان و کسب موفقیت‌ها و رتبه‌های فراوان بین‌المللی و کشوری آنان شد، ما را بر آن داشت تا در تحقق اهدافمان با انگیزه‌تر و مصمم‌تر قدم برداریم. این کتاب با عنوان بانک سوالات ۹ دوره المپیاد ریاضی نوجوانان ایران برای ایجاد آمادگی بیشتر نوجوانان در دهمین المپیاد ریاضی نوجوانان ایران و المپیادهای جهانی و سایر مسابقات ملی تهیه و تدوین شده است. امید است که نوجوانان کوشا و مستعد سرزمین‌مان با تجربه پرسش‌هایی مفهومی، چالش برانگیز و در سطح استاندارد جهانی بتوانند در مسابقات و المپیادهای ملی و جهانی همچنان بدرخشند.

دبیرخانه المپیاد مبتکران



۱. شکل‌های زیر، یکی جدول 1×1389 و دیگری جدول 1×1390 است. تعداد مستطیل‌های جدول پایینی چند تا بیش‌تر از جدول



بالایی است؟

۱ (۱)

۱۳۸۹ (۲)

۱۳۹۰ (۳)

$\frac{138 \times 1390}{2}$ (۴)

1390^2 (۵)

۲. ژاکت سارا ۳ تا دکمه دارد. او به چند ترتیب مختلف می‌تواند دکمه‌های ژاکتش را ببندد؟

۱۰ (۵)

۸ (۴)

۶ (۳)

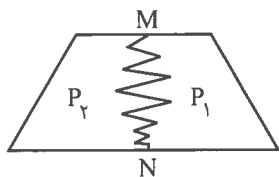
۴ (۲)

۲ (۱)

۳. دوزنقه‌ای متساوی‌الساقین از جنس شیشه مانند شکل زیر شکسته شده است، به طوری که خط شکست از M و N ، وسط

قاعده‌های دوزنقه، گذشته و دو قطعه‌ی P_1 و P_2 به وجود آمده است. محیط P_1 ، 27 سانتی‌متر است. محیط P_2 چند سانتی‌متر

است؟



۲۴ (۱)

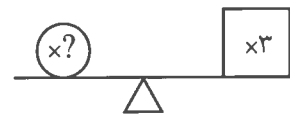
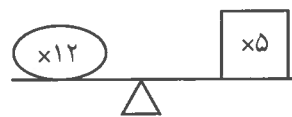
۲۶ (۲)

۲۸ (۳)

۲۷ (۴)

(۵) با این اطلاعات نمی‌توان تعیین کرد.

۴. اگر وزن ۴ هندوانه برابر ۱۵ طالبی و وزن ۵ جعبه تخم‌مرغ برابر وزن ۱۲ هندوانه است. وزن ۳ جعبه تخم‌مرغ برابر چند طالبی است؟



۴۵ (۵)

۲۷ (۴)

۲۸ (۳)

۳۵ (۲)

۲۵ (۱)

۵. در یک لیگ فوتبال ۱۰ تیم حضور دارند و هم‌اکنون نیم‌فصل تمام شده است، یعنی هر تیم با هر تیم دیگری یک بار بازی کرده است.

اکنون (یعنی پایان نیم‌فصل) مجموع امتیازهای این ۱۰ تیم، حداقل و حداکثر چند می‌تواند باشد؟ (در فوتبال، پیروزی ۳ امتیاز،

مساوی ۱ امتیاز و باخت صفر امتیاز دارد.)

۱۵۰-۱۰۰ (۵)

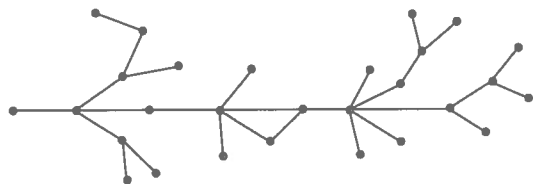
۳۰۰-۲۰۰ (۴)

۱۳۵-۴۵ (۳)

۱۳۵-۹۰ (۲)

۲۷۰-۱۸۰ (۱)

۶. نقشه چند روستا و راه‌های بین آن‌ها به صورت زیر داده شده است: (روستاها با \bullet و راه‌های ارتباطی با — نشان داده شده است).



قرار است برای این شبکه‌ی روستاها، چاه‌های آب ایجاد نماییم، هر روستایی که قرار است، برای آن چاه آب در نظر گرفته شود، با علامت * نشان داده می‌شود، می‌خواهیم این شبکه را با علامت * علامت‌گذاری نماییم، به نحوی که هیچ دو روستای مجاور همزمان دارای چاه آب نباشند و در عین حال از بین هر دو روستای مجاور، حداقل یک روستا دارای چاه آب باشد، به چند طریق می‌توان این شبکه را علامت‌گذاری نمود؟ (دو روستا را مجاور گوییم هرگاه با یک راه ارتباطی به هم متصل گردند).

(۱) حالت ۱ (۲) حالت ۲ (۳) حالت ۳ (۴) حالت ۴ (۵) حالت ۵

۷. ۱۴ خانه به صورت ۷ دایره و ۷ ستاره را یکی در میان دور هم چیده‌ایم. اعداد ۱ تا ۱۴ را درون این ۱۴ خانه طوری قرار داده‌ایم که مجموع دو عدد درون دو دایره کنار هم برابر عدد ستاره‌ی بین آن‌ها باشد. مجموع اعداد تمامی دایره‌ها چند می‌باشد؟

(۱) ۳۵ (۲) ۷۰ (۳) ۱۰۵ (۴) ۹۱ (۵) ۱۸۲

۸. دستگاهی به نام f به این صورت کار می‌کند که یک عدد طبیعی را به عنوان ورودی دریافت می‌کند، آن عدد را سه برابر می‌کند سپس به علاوه یک می‌کند و در نهایت بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه فرد عدد به دست آمده را در خروجی نمایش می‌دهد. خلاصه عملیات بالا، به صورت زیر نمایش داده شده است.

$i \xrightarrow{\text{ورودی}} \boxed{f} \longrightarrow f(i) = ((3i + 1))$ (بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه فرد $(3i + 1)$)

در شکل بالا ورودی را با i و خروجی را با $f(i)$ نمایش داده‌ایم. چند مثال:

$3 \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow f(3) = 5$

$5 \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow f(5) = 1$

حال می‌خواهیم نماد $f^n(i)$ را تعریف نماییم. به مثال زیر توجه کنید:

$3 \longrightarrow \boxed{f} \xrightarrow{5} \boxed{f} \xrightarrow{1}$

ابتدا ورودی ۳ را به دستگاه f می‌دهیم، می‌دانیم در خروجی عدد ۵ داریم، حال اگر خروجی را که همان عدد ۵ می‌باشد را به عنوان ورودی به یک دستگاه دیگر از همان نوع بدهیم، خروجی دستگاه دوم عدد ۱ می‌باشد. خلاصه عملیات بالا را به صورت زیر نمایش می‌دهیم.

$3 \longrightarrow \boxed{f^2} \longrightarrow f^2(3) = 1$

به عبارتی $f^2(3)$ خروجی نهایی است هنگامی که ورودی ۳ را به دو دستگاه متوالی بدهیم، در نتیجه $f^n(i)$ یعنی آخرین خروجی به دست آمده در صورتیکه ورودی i را به n دستگاه متوالی بدهیم.

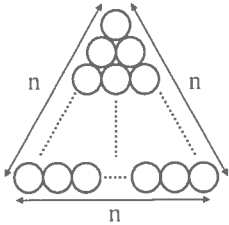
برای مثال $f^4(3)$ را می‌توان به صورت زیر نمایش داد.

$3 \longrightarrow \boxed{f} \xrightarrow{5} \boxed{f} \xrightarrow{1} \boxed{f} \xrightarrow{1} \boxed{f} \xrightarrow{1} f^4(3) = 1$

با توجه به توضیحات بالا، کوچک‌ترین عدد مثبت n را که به ازای آن $f^n(4) = 13$ می‌باشد، کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴ (۵) ۵

۹. تعداد $\frac{n(n+1)}{2}$ گوی به شکل مثلثی به ضلع n گوی چیده شده‌اند. وقتی که یک گوی را از قاعده‌ی این مثلث برمی‌داریم، تمام گوی‌هایی که در سطر بالایی با آن در تماس‌اند نیز برداشته می‌شوند و به همین ترتیب کار ادامه پیدا می‌کند تا بالاترین گوی هم برداشته شود. می‌دانیم که با برداشتن یک گوی از قاعده‌ی مثلث مجموعاً ۲۵ گوی برداشته شده است. کدام گزینه می‌تواند در مورد عدد n و شماره‌ی گوی برداشته شده از قاعده درست باشد؟



- (۱) $n = 11$ و گوی سوم قاعده
- (۲) $n = 10$ و گوی چهارم قاعده
- (۳) $n = 10$ و گوی سوم قاعده
- (۴) $n = 9$ و گوی پنجم قاعده
- (۵) $n = 9$ و گوی چهارم قاعده

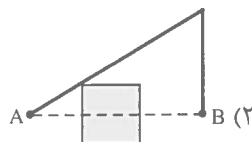
۱۰. در شهر دو طبقه، میانگین دستمزد ساکنان طبقه‌ی بالا، ۲۰۰۰۰ تومان در روز و میانگین دستمزد ساکنان طبقه‌ی پایین، ۱۶۰۰۰ تومان در روز است. یکی از ساکنان این شهر از یک طبقه به طبقه‌ی دیگر نقل مکان کرده است. او مدعی است که با این نقل مکان، میانگین دستمزد هر دو طبقه شهر بیش‌تر شده است. کدام گزینه درست است؟

- (۱) امکان ندارد که این ادعا درست باشد.
- (۲) این ادعا در صورتی درست است که او از طبقه‌ی بالا به پایین رفته باشد و دستمزدش بیش‌تر از ۲۰۰۰۰ تومان در روز باشد.
- (۳) این ادعا در صورتی است که او از طبقه‌ی پایین به بالا رفته باشد و دستمزدش بیش‌تر از ۲۰۰۰۰ تومان در روز باشد.
- (۴) این ادعا در صورتی درست است که او از طبقه‌ی بالا به پایین رفته باشد و دستمزدش بین ۱۶۰۰۰ تا ۲۰۰۰۰ تومان در روز باشد.
- (۵) این ادعا در صورتی است که او از طبقه‌ی پایین به بالا رفته باشد و دستمزدش بین ۱۶۰۰۰ تا ۲۰۰۰۰ تومان در روز باشد.

۱۱. اگر فاصله‌ی بین ۵ نقطه‌ی روی خط در شکل زیر مساوی باشند، این شکل دارای چند محور تقارن می‌باشد؟



۱۲. در کف یک انبار، موشی که در نقطه‌ی A قرار دارد، می‌خواهد با طی کردن کوتاه‌ترین مسیر به فندقی که در نقطه‌ی B قرار دارد، برسد و باید مواظب باشد که در چاله‌ی مربع شکل نیفتد. کوتاه‌ترین مسیر کدام است؟ (فرض کنید خط واصل بین A و B محور تقارن مربع است).



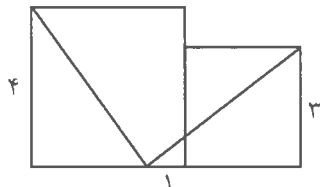
۱۳. کدام گزینه برابر حاصل ضرب سایر گزینه‌هاست؟

- (۱) ۹
- (۲) $\frac{3}{25}$
- (۳) $\frac{1}{15}$
- (۴) $-\frac{1}{25}$
- (۵) -۵

۱۴. حاصل عبارت $(5^8 + 5^8 + 5^8 + 5^8) \times (3^8 + 3^8 + 3^8 + 3^8 + 3^8) \times (2^7 + 2^7 + 2^7)$ برابر کدام است؟

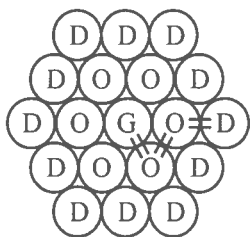
- ۳۰^{۱۰} (۱) ۳۰^۹ (۲) ۳۰^۸ (۳) ۳۰^۷ (۴) ۳۰^۶ (۵)

۱۵. دو مربع به ضلع‌های ۳ سانتی‌متر و ۴ سانتی‌متر را کنار هم قرار داده و مطابق شکل برش داده‌ایم. با استفاده از تمام قطعات به دست آمده یک مربع بزرگ‌تر ساخته‌ایم. محیط مربع ساخته شده کدام است؟



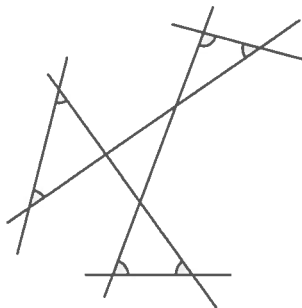
- ۱۸ (۱) ۲۰ (۲) ۲۲ (۳) ۲۴ (۴) ۲۶ (۵)

۱۶. در شکل زیر، با شروع از دایره‌ی مرکزی می‌توان به دایره‌ای رفت که با دایره‌ای که در آن قرار داریم، مماس باشد. می‌خواهیم با سه حرکت، کلمه‌ی لاتین GOOD را به وجود آوریم. به چند طریق این کار امکان‌پذیر است؟ یک مثال در شکل زیر می‌بینید.



- ۲۴ (۱) ۲۱۶ (۲) ۱۸ (۳) ۳۶ (۴) ۱۱ (۵)

۱۷. در شکل زیر، اطلاعات خاصی در مورد خطوط رسم شده در اختیار نداریم، در مورد مجموع زوایای مشخص شده کدام گزینه درست است؟



- (۱) برابر ۲۱۵ درجه است.
(۲) برابر ۳۰۰ درجه است.
(۳) برابر ۳۶۰ درجه است.
(۴) برابر ۳۸۷ درجه است.
(۵) نیاز به اطلاعات بیشتری است.

۱۸. در جدول مربعی روبه‌رو، اعداد ۱ تا ۱۰۰ را در خانه‌های جدول به صورت مرتب و پشت سر هم نوشتیم و سپس مضرب‌های ۵ را رنگ کردیم.

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
...									

در شکل زیر قسمتی از یک جدول مربعی دیگر نشان داده شده است. اعداد ۱ تا a را در خانه‌های این جدول به همان ترتیب بالا نوشته‌ایم و سپس مضرب‌های b را رنگ کرده‌ایم.

a و b به ترتیب می‌توانند کدام‌یک از گزینه‌های زیر باشند؟

- ۸ و ۸۱ (۱) ۵ و ۳۶ (۲) ۷ و ۱۰۰ (۳) ۶ و ۴۹ (۴) ۶ و ۶۴ (۵)

۱۹. مجموع ۱۹ عدد طبیعی برابر ۳۹۰ می‌باشد. حداکثر چند تا از آن‌ها بیش‌تر از ۲۱ هستند؟

- (۱) ۱۷ (۲) ۱۸ (۳) ۱۵ (۴) ۱۴ (۵) ۱۹

۲۰. دو خط متقاطع a و b را در نزدیکی فلش M در شکل روبه‌رو رسم می‌کنیم. ابتدا فلش M را نسبت به خط a و سپس نسبت به خط b قرینه می‌کنیم و شکل به دست آمده را فلش X می‌نامیم. سپس فلش M را نسبت به خط b و سپس از آن نسبت به خط a قرینه می‌کنیم و شکل به دست آمده را فلش Y می‌نامیم. فلش X و Y در یک راستا و در دو جهت مختلف قرار می‌گیرند. کدام گزینه درست است؟



- (۱) a و b بر هم عمودند.
 (۲) زاویه بین a و b ، 45° درجه است.
 (۳) اختلاف جهت X و Y به زاویه بین a و b مربوط نیست.
 (۴) یکی از دو فلش X یا Y با فلش M هم‌جهت است.
 (۵) فلش X و Y با فلش M هم راستا هستند.

۲۱. اگر حاصل‌ضرب یکان و دهگان عددی دو رقمی با رقم یکان و دهگان این عدد جمع شود و حاصل برابر خود عدد شود، آن عدد را جالب می‌نامیم. تعداد اعداد جالب کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۹ (۴) ۱۸ (۵) ۱۹

۲۲. تعداد ارقام در نمایش عددی 2^{2011} به کدام عدد نزدیک‌تر است؟

- (۱) ۴۰۰ (۲) ۵۰۰ (۳) ۶۰۰ (۴) ۷۰۰ (۵) ۸۰۰

۲۳. وسط یک مستطیل کاغذی را مانند شکل زیر، خط چین کشیده‌ایم:



سپس یک گوشه آن را مانند شکل زیر روی خط چین تا کرده‌ایم:



پس از آن تا را باز کرده‌ایم و شکل ایجاد شده را به صورت زیر نام گذاری نموده‌ایم. کدام گزینه درباره این شکل درست نیست؟

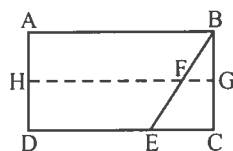
(۱) اختلاف مساحت دوزنقه $ABFH$ و دوزنقه $HFED$ برابر اختلاف مساحت دوزنقه $FGCE$ و مثلث BGF است.

(۲) اندازه‌ی زاویه \widehat{EBC} ، 30° است.

(۳) BF برابر CE است.

(۴) مثلث‌های BCE و BGF دارای زاویه‌های برابرند.

(۵) CE برابر نصف BC است.



۲۴. پادشاه کشوری تصمیم گرفت در یکی از عیدهای کشور، به هر کسی که در شهر باشد عیدی بدهد. به هر آدم بالغ ۱۰۰ هزار تومان و به هر نابالغی ۳۰ هزار تومان عیدی بدهد.

او که می‌خواست تا آن‌جا که ممکن باشد، کمتر از خزانه پول بردارد، هنگام صبح وارد شهری شد که کل جمعیت آن ۵۰۰۰ نفر بود. زیرا می‌دانست که صبحگاه ۷۰ درصد آدم‌های بالغ شهر برای کشاورزی از شهر خارج می‌شوند و او می‌تواند به آن‌ها عیدی ندهد. (نابالغ‌ها در شهر می‌مانند). پادشاه چه قدر پول باید صرف عیدی بکند؟

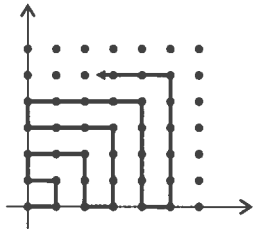
- (۱) ۱۵۰ میلیون تومان (۲) ۵۰ میلیون تومان (۳) ۳۵۰ میلیون تومان (۴) ۳۰۰ میلیون تومان

(۵) بستگی به این دارد که چه تعدادی از اهالی شهر بالغ باشند.

۲۵. در مدرسه‌ای ۶۳۰ دانش‌آموز در چندین صف ایستاده‌اند طوری که در هر صف ۳ دانش‌آموز بیش‌تر از صف قبلی ایستاده‌اند. کدام عدد برای تعداد صف‌ها غیرممکن است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶ (۵) ۷

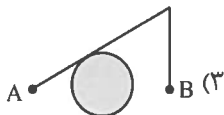
۲۶. یک روبات در دستگاه مختصات دنبال یک گنج می‌گردد و می‌داند که گنج در نقطه‌ای با مختصات طبیعی قرار دارد. او از مبدأ شروع می‌کند و طبق روشی که در شکل زیر می‌بینید، نقطه‌ها با مختصات طبیعی را می‌گردد. برای مثال روبات در سومین مکان خود نقطه‌ی $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، یا در هشتمین مکان خود نقطه‌ی $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ را می‌گردد.



چنانچه روبات در دویستمین مکان خود، گنج را پیدا کند، گنج در کدام نقطه قرار داشته است؟

- (۱) $\begin{bmatrix} 13 \\ 3 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 3 \\ 14 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 4 \\ 12 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 12 \\ 4 \end{bmatrix}$ (۵) $\begin{bmatrix} 12 \\ 5 \end{bmatrix}$

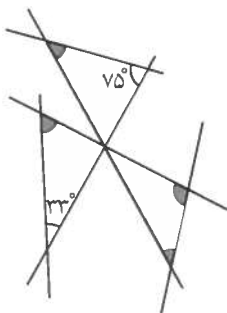
۲۷. در کف یک انبار، موشی که در نقطه‌ی A قرار دارد، می‌خواهد با طی کردن کوتاه‌ترین مسیر به فندقی که در نقطه‌ی B قرار دارد، برسد و باید مواظب باشد که در چاله‌ی دایره‌ای شکل نیفتد. کوتاه‌ترین مسیر کدام است؟ (فرض کنید خط واصل A و B، محور تقارن دایره باشد.)



۲۸. دو دایره‌ی مماس خارج در صفحه رسم شده‌اند. کدام گزینه نمی‌تواند تعداد نقاط برخورد یک خط راست با این دو دایره باشد؟



- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴ (۵) ۵



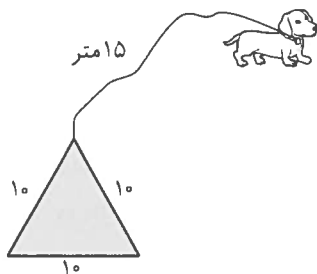
۲۹. مجموع چهار زاویه‌ای که با رنگ تیره در شکل نشان داده شده است، برابر با کدام گزینه می‌باشد؟

- (۱) 52° (۲) 175° (۳) 252° (۴) 36° (۵) نمی‌توان تعیین کرد.

۳۰. جنگلی شامل ۳۰۰۰۰۰ درخت برگ‌دار است و هر درخت برگ‌دار شامل برگ‌هایی است که تعداد آن‌ها بین صفر و ۲۰۰۰۰۰ است. کدام گزینه همواره درست است؟

- (۱) دو درخت از این جنگل هیچ‌گاه نمی‌توانند به یک اندازه برگ داشته باشند.
 (۲) یک درخت در جنگل هست که فقط یک برگ دارد.
 (۳) حداکثر دو درخت در جنگل هست که هر دو به یک اندازه برگ دارند.
 (۴) درخت‌هایی در جنگل هستند که هیچ برگ ندارند.
 (۵) حداقل دو درخت وجود دارند که شامل برگ‌های یکسان می‌باشند.

۳۱. سگی به گوشه‌ی حصار یک باغ که به شکل مثلثی متساوی‌الاضلاع با اندازه‌ی اضلاع ۱۰ متر است، بسته شده است. اگر طول طنابی که سگ توسط آن بسته شده برابر ۱۵ متر باشد، مساحت ناحیه‌ای که سگ می‌تواند در آن حرکت کند تقریباً چند مترمربع است؟ (سگ نمی‌تواند وارد قسمت رنگ شده بشود.)



(۱) 90π

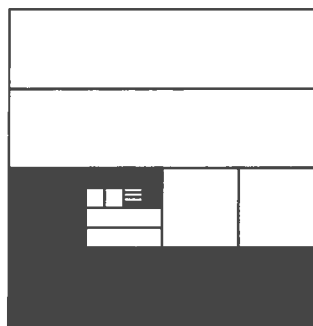
(۲) 80π

(۳) 204π

(۴) 125π

(۵) 144π

۳۲. چه کسری از شکل زیر، رنگی است؟



(۱) $\frac{1}{4}$

(۲) $\frac{1}{3}$

(۳) $\frac{1}{3} - \frac{1}{4}$

(۴) $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$

(۵) $\frac{1}{3} + \frac{1}{12}$

۳۳. در یک لیگ فوتبال ۱۰ تیم حضور دارند و هم‌اکنون نیم فصل تمام شده است، یعنی هر تیم با هر تیم دیگر دقیقاً یک بار بازی کرده است. اکنون (یعنی در پایان نیم فصل)، مجموع امتیازهای تیم‌ها ۱۱۵ است. چند بازی نتیجه‌ی تساوی داشته است؟ (در یک مسابقه‌ی فوتبال تیم برنده ۳ امتیاز و تیم بازنده صفر امتیاز می‌گیرد. اگر بازی مساوی شود هر تیم ۱ امتیاز می‌گیرد.)

(۱) ۵

(۲) ۱۰

(۳) ۱۵

(۴) ۲۰

(۵) ۲۵

۳۴. شخصی سه فرزند دختر دارد. او در عید سال ۱۳۸۹ به هر کدام از فرزندانش گفت: «عیدی‌ای که به تو می‌دهم برحسب تومان برابر است با حاصل ضرب سن‌های دو خواهرت» و بدین ترتیب به هر کدام از آن‌ها مقداری عیدی داد. وی در عید سال ۱۳۹۰ نیز به همین ترتیب به فرزندانش عیدی داد. او متوجه شد که در سال ۱۳۹۰ مقدار ۳۳ تومان بیش‌تر از سال ۱۳۸۹ به فرزندانش عیدی داده است. مجموع سن سه فرزندش در سال ۱۳۸۹ چند سال بوده است؟

(۱) ۱۰

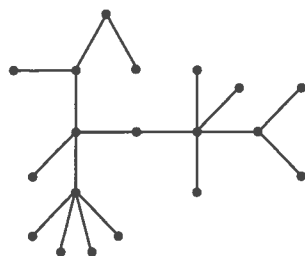
(۲) ۱۵

(۳) ۱۸

(۴) ۳۰

(۵) ۳۳

۳۵. نقشه‌ی چند روستا و راه‌های بین آن‌ها به صورت مقابل نشان داده شده است:



(روستاها با ● و راه‌های ارتباطی با — نشان داده شده است.)

قرار است برای این شبکه‌ی روستایی، چاه‌های آب ایجاد شود، هر روستایی که قرار است، برای آن چاه آب در نظر گرفته شود، با علامت * نشان داده می‌شود، می‌خواهیم این شبکه را با علامت * علامتگذاری نماییم، به نحوی که هیچ دو روستای مجاور همزمان دارای چاه آب نباشند و در عین حال از بین هر دو روستای مجاور، حداقل یک روستا دارای چاه آب باشد، به چند طریق می‌توان این شبکه را علامتگذاری کرد؟ (دو روستا را مجاور گوییم هرگاه با یک راه ارتباطی به هم متصل گردند.)

(۱) صفر

(۲) ۲

(۳) ۱

(۴) 2^{20}

(۵) 2^{21}

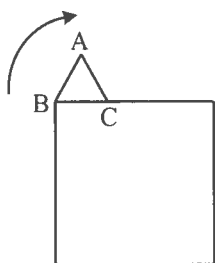
۳۶. در جزیره‌ای به شکل مثلث، کدام نقطه است که از دریا دورترین فاصله را دارد؟

- (۱) نقطه‌ی برخورد ارتفاع‌های مثلث
 (۲) مرکز ثقل مثلث
 (۳) مرکز دایره‌ی محاطی مثلث
 (۴) مرکز دایره‌ی محیطی مثلث
 (۵) نقطه‌ی برخورد میانه‌های مثلث

۳۷. ۱۰۰ بار عبارت PERSIANGULF را پشت سر هم نوشته‌ایم. در هر مرحله تمام حروفی که شماره‌ی جایگاه آن از سمت چپ مضرب ۳ نیستند را حذف می‌کنیم و حروف باقی‌مانده را کنار هم می‌نویسیم. این کار را آن‌قدر ادامه می‌دهیم تا یک حرف باقی بماند، آن حرف کدام است؟

- (۱) P (۲) E (۳) R (۴) S (۵) A

۳۸. در شکل مقابل اندازه‌ی ضلع مربع برابر ۳ سانتی‌متر و اندازه‌ی ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع برابر ۱ سانتی‌متر است. مثلث را از وضعیت موجود در جهت حرکت عقربه‌های ساعت روی اضلاع مربع می‌غلطانیم تا دوباره به وضعیت اولیه درآید. رأس A تقریباً چه مسافتی را بر حسب سانتی‌متر طی می‌کند؟ ($\pi = 3$)



- (۱) ۲۰
 (۲) ۲۲
 (۳) ۲۳
 (۴) ۲۴
 (۵) ۲۵

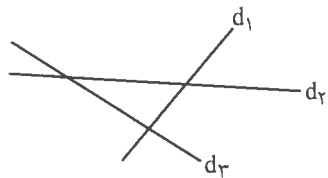
۳۹. پاره‌خط AB به اندازه ۷ در صفحه داده شده است. چند خط در صفحه وجود دارد که فاصله‌اش از A برابر با ۳ و از B برابر با ۴ باشد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴ (۵) ۵

۴۰. مجموع کدام دسته از بردارهای زیر هرگز صفر نمی‌شود؟ (در گزینه‌ها طول بردارها داده شده است).

- (۱) ۹, ۷, ۵ (۲) ۳, ۸, ۴ (۳) ۵, ۵, ۵ (۴) ۸, ۵, ۳ (۵) ۱۳, ۸, ۵, ۳

۴۱. سه خط دلخواه d_1, d_2, d_3 مطابق شکل در صفحه رسم شده‌اند. چند نقطه در صفحه وجود دارد که فاصله آن از هر سه خط یکسان باشد؟



- (۱) صفر
 (۲) ۱
 (۳) ۲
 (۴) ۳
 (۵) ۴

۴۲. دایره‌ای بر ضلع BC و امتداد اضلاع AB, AC از مثلث ABC همانند شکل، مماس شده است. محل تماس دایره با امتداد اضلاع AB, AC را به ترتیب B', C' می‌نامیم. اگر محیط مثلث ABC، ۱۳ سانتی‌متر باشد آن‌گاه طول AC' چند سانتی‌متر است؟

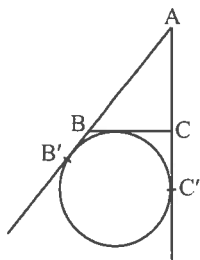
- (۱) ۷

(۲) اطلاعات مسأله کافی نمی‌باشد.

- (۳) ۶/۵

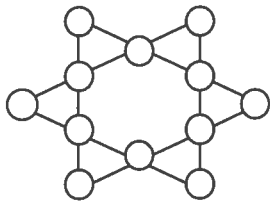
- (۴) ۸

- (۵) ۷/۵



۴۳. ۱۲ دایره در ۶ ردیف (هر ردیف شامل ۴ دایره است که در یک امتداد قرار دارند) مطابق شکل زیر چیده شده‌اند. اگر اعداد ۱ تا ۱۲ را

درون این دایره‌ها چیده باشیم به طوری که جمع اعداد همه ردیف‌ها با یکدیگر برابر باشند، حاصل جمع اعداد هر ردیف کدام است؟



۲۶ (۲)

۱۳ (۴)

(۱) اطلاعات مسأله برای محاسبه کافی نمی‌باشد.

۲۲ (۳)

۱۱ (۵)

۴۴. در کوچه‌ای تعدادی خانه وجود دارد که تعداد آن‌ها از ۱۵ بیش‌تر نیست. آن‌ها به ترتیب ردیف با عددهای ۱, ۲, ۳, ... شماره‌گذاری

شده‌اند. آقای نقی‌بی در خانه‌ای زندگی می‌کند که حاصل ضرب اعداد خانه‌های قبلی آن برابر است با حاصل ضرب اعداد خانه‌های

بعدی آن (خانه‌ها به ترتیب شماره‌گذاری شده‌اند). در این کوچه چند خانه وجود دارد؟

۱۴ (۵)

۱۳ (۴)

۱۲ (۳)

۱۱ (۲)

۱۰ (۱)

۴۵. s, r, q, p هر کدام عددی اول هستند که در رابطه $p \times (q \times r \times s - 1) = 2000$ صدق می‌کنند: مقدار $p + q + r + s$ چند است؟

۳۹ (۵)

۳۷ (۴)

۳۵ (۳)

۳۳ (۲)

۳۱ (۱)

۴۶. درون یک جعبه ۱۰۱ کارت وجود دارد و روی این کارت‌ها اعداد ۱ تا ۱۰۱ نوشته شده‌اند. به طور تصادفی یک کارت از درون جعبه

انتخاب می‌کنیم و عدد روی آن را منهای ۱ می‌کنیم و سپس کارت بعدی را انتخاب می‌کنیم و عدد روی این کارت را منهای ۲

می‌نماییم و به همین ترتیب تا کارت صد و یکم را برمی‌داریم و عدد روی آن را منهای ۱۰۱ می‌کنیم و سپس این اعداد را در هم ضرب

می‌کنیم. بدون در نظر گرفتن علامت عدد حاصل، کدام گزینه در مورد عدد حاصل همواره درست می‌باشد؟

(۲) عدد حاصل مربع کامل می‌باشد.

(۱) عدد حاصل صفر می‌گردد.

(۴) عدد حاصل یک عدد فرد می‌باشد.

(۳) عدد حاصل زوج می‌باشد.

(۵) عدد حاصل گاهی اوقات فرد و گاهی اوقات زوج می‌باشد.

۴۷. از گزاره‌های زیر کدام درست است؟

(الف) اگر سه تا از رأس‌های یک شش ضلعی منتظم را قرمز و سه تای دیگر را آبی کنیم، مثلث با نقاط قرمز و مثلث با نقاط آبی با هم

برابر می‌شوند.

(ب) زاویه بین هر دو تایی از کلیه ضلع‌ها و قطرهای یک شش ضلعی منتظم که هم‌دیگر را قطع می‌کنند برحسب درجه مضرب‌ی از ۳۰

می‌شود.

(پ) اگر چهار تا از رأس‌های یک شش ضلعی منتظم را انتخاب کنیم، آن‌گاه چهارضلعی‌ای که توسط آن رأس‌ها درست می‌شود، دارای

محور تقارن است.

(۵) الف، ب و پ

(۴) الف و ب

(۳) پ

(۲) ب

(۱) الف

۴۸. نمایش اعضای مجموعه‌های A, B, C را در زیر می‌بینید:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{8, 7, 6, 5\}$$

$$C = \{11, 10, 9\}$$

از هر مجموعه یک عضو را انتخاب می‌کنیم و حاصل ضرب سه عدد انتخاب شده را حساب می‌کنیم. به سادگی می‌توان فهمید که این کار

به ۴۸ طریق امکان‌پذیر است. اگر برای همه ۴۸ حالت این کار را انجام دهیم، مجموع این ۴۸ عدد برابر با کدام گزینه است؟

۹۰۰۰ (۵)

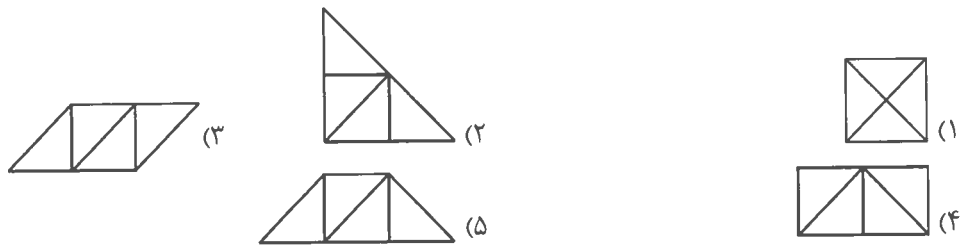
۷۷۰۰ (۴)

۶۶۰۰ (۳)

۵۵۰۰ (۲)

۷۸۰۰ (۱)

۱۳۸. در ساخت پنج شکل در گزینه‌های زیر از چهار مثلث که اندازه همه آن‌ها مساوی است استفاده شده است، کدام شکل محیط کم‌تری دارد؟



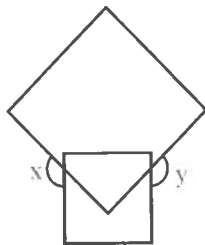
۱۳۹. فرض کنید n برابر با حاصل ضرب اعداد اول بین ۱۰۰ تا ۲۰۰ باشد. عدد n در سمت راست خود چند رقم صفر دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۹ (۵) ۲۶

۱۴۰. در یک صندوقچه تعدادی سکه قرار دارد. یک سوم سکه‌ها طلا، یک پنجم سکه‌ها نقره و دو هفتم سکه‌ها برنز و بقیه از جنس مس می‌باشند. اگر ظرفیت صندوقچه ۲۰۰ سکه باشد، کدام گزینه می‌تواند تعداد سکه‌های درون صندوقچه باشد؟

- (۱) ۱۰۱ (۲) ۱۰۵ (۳) ۱۵۳ (۴) ۱۹۵ (۵) ۲۰۰

۱۴۱. دو مربع در شکل رسم شده است. حاصل $\hat{x} + \hat{y}$ برابر با کدام گزینه است؟



- (۱) 240°
(۲) 270°
(۳) 300°
(۴) 330°
(۵) 360°

۱۴۲. اعداد ۱، ۲، ۳، ...، ۹۹۹۹ و ۱۰۰۰۰ را مطابق شکل، روی رأس‌های یک شبکه 100×100 (شامل ۱۰۰۰۰ نقطه) نوشته‌ایم. می‌دانیم روی رأس A عدد ۳۶۷۱ و روی رأس B عدد ۵۱۴۹ نوشته شده است. در این صورت، روی نقطه قرینه A نسبت به نقطه B، چه عددی نوشته شده است؟

۱	۲	۳	۴	...
۱۰۱	۱۰۲	۱۰۳	۱۰۴	...
۲۰۱	۲۰۲	۲۰۳	۲۰۴	...
۳۰۱	۳۰۲	۳۰۳	۳۰۴	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

- (۱) ۸۸۲۰
(۲) ۴۴۱۰
(۳) ۶۶۲۷
(۴) ۴۳۶۵
(۵) ۱۳۹۲

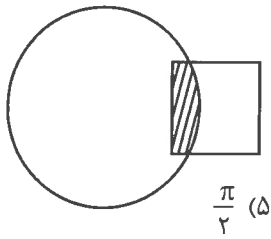
۱۴۳. روی کارت اعداد ۵، ۱۰، ۱۵، ۲۰ و ... و ۱۴۵ نوشته شده‌اند. با چشمان بسته، حداقل چند کارت برداریم تا مطمئن باشیم که دو کارت در بین کارت‌های برداشته شده یافت می‌شود که مجموع آن‌ها ۱۵۰ است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۱۴ (۴) ۱۵ (۵) ۱۶

۱۴۴. عددهای \overline{ab} و \overline{ba} دو عدد دو رقمی هستند. حاصل ضرب آن‌ها عددی چهار رقمی با یکان ۳ است. حاصل تفریق آن‌ها چه عددی

است؟ (عدد دو رقمی با رقم یکان b و رقم دهگان a را به صورت \overline{ab} نمایش می‌دهیم.)

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۸ (۳) ۲۴ (۴) ۳۲ (۵) ۳۸



۱۴۵. در شکل مقابل مساحت ناحیه هاشور خورده $\frac{2}{7}$ مساحت مربع و $\frac{1}{14}$ مساحت دایره است. نسبت ضلع مربع به شعاع دایره کدام است؟

(۵) $\frac{\pi}{2}$

(۴) $\frac{\pi}{4}$

(۳) $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

(۲) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

(۱) $\frac{\sqrt{\pi}}{4}$

۱۴۶. کامبیز برای شماره‌گذاری یادداشت‌هایش از اولین صفحه آغاز کرد، اما به جای آن که صفحه‌ها را به ترتیب با اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ و ... شماره‌گذاری کند، به اشتباه صفحه‌ها را به ترتیب با اعداد فرد ۱، ۳، ۵، ۷ و ... شماره‌گذاری کرد. یعنی پشت و روی اولین ورقه ۱ و ۳ نوشت. یادداشت‌ها را جدا کرد و شماره پشت و روی هر صفحه را با هم جمع کرد. کدام عدد می‌تواند یکی از اعداد حاصل جمع باشد؟

(۵) ۹۶

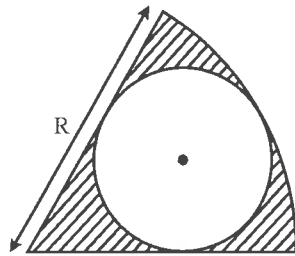
(۴) ۹۴

(۳) ۹۲

(۲) ۹۰

(۱) ۸۸

۱۴۷. فرض کنید در شکل زیر $R = 3r$ که r شعاع دایره داخلی است. نسبت مساحت هاشور خورده به کل شکل چند است؟



(۲) $\frac{1}{3}$

(۱) $\frac{2}{3}$

(۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(۳) $\frac{1}{2}$

(۵) هیچ کدام

۱۴۸. ۱۸ نفر در یک جا دور هم جمع شده‌اند. هر کدام از آن‌ها یا دروغگو است و همیشه دروغ می‌گوید، یا راستگو است و همیشه راست می‌گوید. هر کدام از آن‌ها، درباره ۱۷ نفر بقیه، مدعی شد: «بیش از نیمی از آن‌ها دروغگو هستند.» تعداد دروغگوها چند نفر است؟

(۵) ۹

(۴) ۱۰

(۳) ۱۲

(۲) ۱۷

(۱) ۱۸

۱۴۹. عددی را متقارن می‌گوییم که اگر از هر دو طرف خوانده شود یک مقدار باشد، مثلاً ۱۴۴۱ و ۳۵۲۵۳ متقارن‌اند. چند عدد ۶ رقمی متقارن وجود دارد که بر ۴۵ بخش‌پذیر باشد؟

(۵) ۱۴

(۴) ۱۳

(۳) ۱۲


(۲) ۱۱

(۱) ۱۰

۱۵۰. یک چراغ راهنمایی و رانندگی رقم‌های ۰، ۱، ...، ۹ را به شکل زیر نمایش می‌دهد:



این ساعت دچار یک نقص فنی شده است. یعنی در هر لحظه بعضی از لامپ‌ها را روشن نمی‌کند. مثلاً ثانیه ۲۴ و ثانیه بعد ۲۵ را به

جای آن که نشان دهد ممکن است  و  نشان دهد.

اکنون می‌دانیم ثانیه شمار این چراغ در یک ثانیه  را نشان داد و در ثانیه بعدی  را.

در این صورت در ثانیه دوم چند لامپ روشن نشده‌اند؟ (هر چراغ شامل ۷ لامپ است.)

(۵) ۱۰

(۴) ۹

(۳) ۸

(۲) ۷

(۱) ۶

۱۵۱. عدد A کوچک‌ترین عدد طبیعی است که ویژگی‌های زیر را دارد:

- اگر آن را در ۲ ضرب کنیم حاصل، مربع کامل می‌شود.

- اگر آن را در ۳ ضرب کنیم حاصل، مکعب کامل می‌شود.

- اگر آن را در ۵ ضرب کنیم حاصل، برابر با توان پنجم یک عدد طبیعی می‌شود.

اگر عدد A را تجزیه کنیم، مجموع توان‌ها چند خواهد شد؟

۱۸ (۵)

۳۶ (۴)

۴۹ (۳)

۵۹ (۲)

۶۴ (۱)

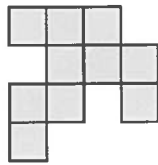
۱۵۲. اگر ۱۰ تا مربع را از طریق ضلع‌هایشان به هم بچسبانیم یک شکل ایجاد می‌شود که «دکامینو» نام دارد. (دکا در زبان لاتین به معنی

عدد ۱۰ است.) در کل می‌توان ۴۶۵۵ تا دکامینو تولید کرد. مثلاً در شکل‌های زیر، شکل سمت راست دکامینو نیست ولی دو تای

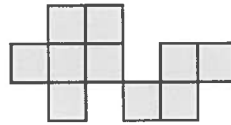
دیگر هستند:



✓



✓



✗

در بین کل دکامینوها، چندتا در یک مستطیل 2×6 جای می‌گیرد؟ (در بین مثال‌های بالا، شکل سمت چپی در مستطیل 2×6 جای می‌گیرد ولی شکل وسط نه) دقت کنید اگر یک شکل دوران یافته یا تقارن یافته شکل دیگری باشد، آن را نمی‌شماریم.

۲۴ (۵)

۲۰ (۴)

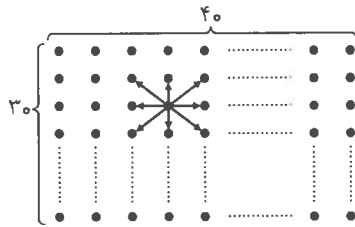
۱۸ (۳)

۱۶ (۲)

۱۲ (۱)

۱۵۳. تعدادی دانش‌آموز مطابق شکل در ۳۰ ردیف و ۴۰ ستون ایستاده‌اند. هر فرد با افراد پیرامون خود دست می‌دهد. به‌طور مثال فردی

که در نقطه A ایستاده است با ۸ نفر دست می‌دهد. در کل چند بار عمل دست دادن انجام می‌گیرد؟



۹۳۸۴ (۱)

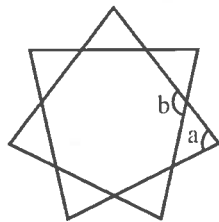
۴۶۹۲ (۲)

۴۸۰۰ (۳)

۹۱۸۴ (۴)

۴۵۹۲ (۵)

۱۵۴. در شکل زیر، با رسم برخی قطرهای یک هفت ضلعی منتظم، یک ستاره ساخته‌ایم، نسبت اندازه زاویه a به زاویه b کدام است؟



$\frac{3}{4}$ (۲)

$\frac{6}{9}$ (۴)

$\frac{3}{5}$ (۱)

$\frac{4}{5}$ (۳)

$\frac{7}{10}$ (۵)

۱۵۵. در جدول زیر، بالای هر ستون و کنار هر ردیف یک عدد نوشته شده است. داخل هر خانه، حاصل ضرب دو عدد ردیف و ستون آن خانه نوشته می‌شود. مثلاً در خانه گوشه چپ پایین باید عدد ۴۴ نوشته شود ($4 \times 11 = 44$), در این صورت مجموع اعداد داخل

جدول چند می‌شود؟

	۱۱	۷	$\frac{1}{5}$	۶	$\frac{4}{5}$	
$\frac{1}{2}$						
$\frac{1}{6}$						
$\frac{1}{3}$						
۴						

- ۵۱ (۱)
- ۵۲ (۲)
- ۵۳ (۳)
- ۵۴ (۴)
- ۵۵ (۵)

۱۵۶. خانه‌های نوار جمعی زیر این‌گونه پر می‌شود که عدد هر خانه برابر با جمع اعداد دو خانه قبلی است.

نوار جمعی (۱)	۱	۱	۲	۳	۵	۸	...
---------------	---	---	---	---	---	---	-----

با استفاده از نوار قبلی، نوار دیگری به این ترتیب پر می‌کنیم که عدد هر خانه نوار قبلی را ضربدر خودش می‌کنیم و داخل خانه متناظر از نوار جدید می‌نویسیم.

نوار جمعی (۲)	۱	۱	۴	۹	۲۵	۶۴	...
---------------	---	---	---	---	----	----	-----

حاصل جمع ۱۰ خانه اول نوار دوم چه عددی است؟

- ۴۸۹۵ (۵)
- ۴۸۹۰ (۴)
- ۷۹۲۰ (۳)
- ۳۰۲۶ (۲)
- ۳۰۲۵ (۱)

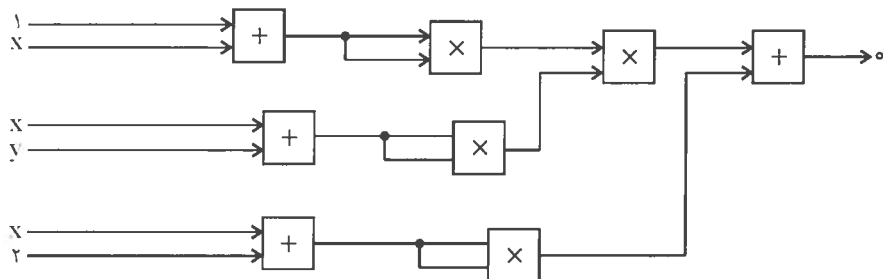
۱۵۷. برای انجام دادن کاری ۱۰ نفر باید ۱۰ روز کار کنند. ۱۰ نفر مشغول به کار می‌شوند و در پایان روز اول یک نفر انصراف می‌دهد، در پایان روز دوم نیز یک نفر دیگر انصراف می‌دهد و به همین ترتیب در آخر هر روز یک نفر انصراف می‌دهد. در این صورت در پایان روز دهم چند درصد از کار انجام شده است؟

- ۴۰ درصد (۱)
- ۴۵ درصد (۲)
- ۵۰ درصد (۳)
- ۵۵ درصد (۴)
- ۶۰ درصد (۵)

۱۵۸. جعبه‌های ضربی و جمعی به صورت زیر عمل می‌کنند.



با توجه نمودار جعبه‌ای زیر، حاصل $x - y$ برابر با کدام گزینه است؟



- ۴ (۱)
- ۴ (۲)
- ۲ (۳)
- ۲ (۴)
- صفر (۵)

۱۵۹. در عبارت زیر داخل دایره‌ها اعداد طبیعی قرار می‌دهیم تا تساوی برقرار باشد. در این صورت مجموع اعداد نوشته شده درون دایره‌ها برابر با کدام گزینه است؟

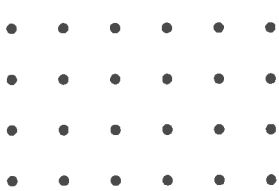
$$\bigcirc x^{\bigcirc} y^{\bigcirc} + 2x^{\bigcirc} y^{\bigcirc} x^{\bigcirc} + \bigcirc x^{\bigcirc} y^{\bigcirc} + x^{\bigcirc} y^{\bigcirc} = 3x^{\bigcirc} y^{\bigcirc} + 8x^{\bigcirc} y^{\bigcirc}$$

- ۴۰ (۵) ۳۹ (۴) ۳۸ (۳) ۳۵ (۲) ۲۴ (۱)

۱۶۰. در یک کیسه تعداد زیادی توپ در n رنگ مختلف وجود دارد. می‌دانیم به هر نحوی ۳۱ توپ از این کیسه خارج کنیم، حداقل ۷ تا از آن‌ها هم رنگ‌اند. حداکثر مقدار ممکن برای n چند است؟

- ۷ (۵) ۶ (۴) ۵ (۳) ۴ (۲) ۳ (۱)

۱۶۱. ۲۴ نقطه، مطابق شکل، تشکیل یک شبکه را داده‌اند. چهار نقطه A, B, C, D را بین آن‌ها طوری انتخاب کرده‌ایم که:

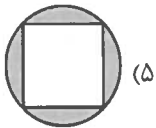


$$DA = 2 \text{ و } CD = \sqrt{10}, \quad BC = \sqrt{8}, \quad AB = \sqrt{26}$$

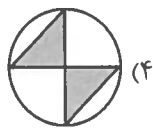
در این صورت طول پاره خط AC کدام است؟

- $\sqrt{17}$ (۱) $\sqrt{18}$ (۲) ۵ (۳)
 $\sqrt{13}$ (۴) ۴ (۵)

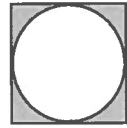
۱۶۲. دایره‌های بزرگ در همهٔ شکل‌ها با هم برابرند. مساحت قسمت سایه‌خورده در کدام شکل بیش تر است؟



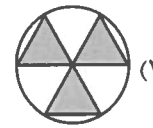
(۵)



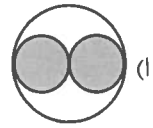
(۴)



(۳)

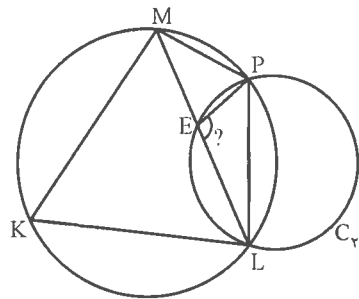


(۲)



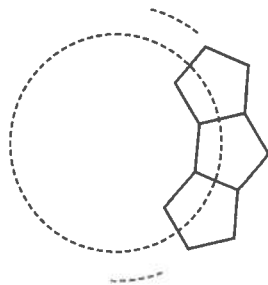
(۱)

۱۶۳. خط KL بر دایره C_p مماس است و اندازهٔ زاویهٔ $\widehat{PMK} = 75^\circ$ است. اندازهٔ زاویهٔ \widehat{PEL} چه قدر است؟



- 75° (۱)
 90° (۲)
 105° (۳)
 135° (۴)
 150° (۵)

۱۶۴. چند تا پنج‌ضلعی منتظم برای کامل کردن حلقهٔ زیر کافی است؟



- ۹ (۱)
 ۱۰ (۲)
 ۱۲ (۳)
 ۱۴ (۴)
 ۱۵ (۵)

۱۶۵. ستار، باقر و خسرو دوست هستند. دو نفر از آن‌ها دروغ گو و یک نفر راست گو است. تصویر آن‌ها را در شکل زیر می‌بینید:



A



B



C

این مکالمات بین آن‌ها رد و بدل می‌شود:

A: «خسرو راست گو است.» B: «باقر سبیل دارد.» C: «کسی که راست گو است، سبیل دارد.»

کدام یک از آن‌ها راست گو است و اسمش چیست؟

- (۱) A - خسرو (۲) B - ستار (۳) C - خسرو (۴) A - باقر (۵) C - ستار

۱۶۶. در عبارت زیر به چند حالت می‌توان مثبت‌ها و منفی‌ها را تعیین کرد به طوری که حاصل مثبت باشد؟ (برای هر عدد یک علامت را باید انتخاب کرد.)

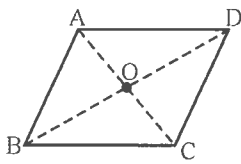
$$\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm \dots \pm 10$$

- (۱) ۲۵۶ (۲) ۵۱۲ (۳) ۱۰۲۴ (۴) ۵۵ (۵) ۱۰۲۳

۱۶۷. یک ماشین کنترلی داریم که وقتی آن را روشن می‌کنیم، به‌طور مستقیم حرکت می‌کند. کنترل این ماشین گاز و ترمز ندارد. فقط دو دکمه $R11^\circ$ و $L19^\circ$ دارد. وقتی دکمه $R11^\circ$ را می‌زنیم، مسیر حرکت ماشین ۱۱ درجه به سمت راست و وقتی دکمه $L19^\circ$ را می‌زنیم، مسیر حرکت ماشین ۱۹ درجه به سمت چپ تغییر می‌کند. ماشین را روی نقطه‌ای قرار می‌دهیم و روشن می‌کنیم تا شروع به حرکت کند. برای این که ماشین را طوری هدایت کنیم که دوباره از نقطه شروع حرکتش عبور کند، حداقل چند دکمه باید بزنیم؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۱ (۳) ۱۹ (۴) ۲۰ (۵) ۲۶

۱۶۸. ABCD یک متوازی‌الاضلاع با رأس‌های ثابت A و B و رأس‌های متحرک C و D است. اگر طول اضلاع ثابت باشد، مسیری که محل برخورد قطرهای متوازی‌الاضلاع بر روی آن حرکت می‌کند یک است.

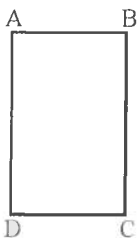


- (۱) متوازی‌الاضلاع (۲) بخشی از یک سهمی
(۳) بیضی (۴) دایره
(۵) مستطیل

۱۶۹. اعداد ۱ تا ۸ را روی ۸ رأس یک مکعب نوشته‌ایم طوری که در هر یک از شش وجه، مجموع هر سه عدد بزرگ‌تر از ۹ باشد. کم‌ترین مجموع اعداد یک وجه چه قدر می‌تواند باشد؟

- (۱) ۱۳ (۲) ۱۴ (۳) ۱۵ (۴) ۱۶ (۵) ۱۷

۱۷۰. در مستطیل مقابل نقطه E را قرینه نقطه A نسبت به قطر BD قرار دهید. اگر $EB = EC$ باشد، نسبت $\frac{AD}{AB}$ چه قدر است؟



- (۱) ۱
(۲) $\sqrt{5}$
(۳) $\sqrt{3}$
(۴) ۴
(۵) ۲

۱۷۱. می‌خواهیم چند ضلعی‌هایی بسازیم که فقط زاویه‌های ۹۰ و ۱۵۰ درجه داشته باشند، با ۴ زاویه ۹۰ درجه می‌توانیم یک چهارضلعی بسازیم. پس چهارضلعی را می‌توان ساخت. اما امکان ساختن پنج‌ضلعی وجود ندارد. چند تا از چندضلعی‌ها را می‌توانیم بسازیم؟

- (۱) سه تا (۲) چهارتا (۳) پنج تا (۴) شش تا (۵) هفت تا

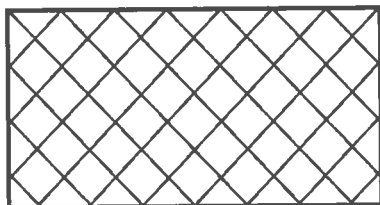
۱۷۲. عدد طبیعی n را عدد «دوزنقه‌ای» می‌نامیم، به شرطی که بتوان n تا سکه را طوری قرار داد که تشکیل یک دوزنقه بدهند. برای مثال عددهای ۱۳ و ۲۲ عددهای دوزنقه‌ای هستند:



دقت کنید برای تشکیل یک دوزنقه حداقل دو ردیف سکه باید باشد. اکنون کدام عدد دوزنقه‌ای نیست؟

- (۱) ۱۹ (۲) ۱۸ (۳) ۱۷ (۴) ۱۶ (۵) ۱۵

۱۷۳. کف اتاقی به شکل مستطیل با کاشی‌های مربع شکل یا قطعه‌ای از مربع، کاشی شده است. نسبت طول به عرض مستطیل کدام است؟

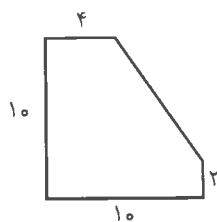


- (۱) $\frac{2}{1}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) $\frac{6}{5}$ (۴) $\frac{8}{7}$ (۵) $\frac{10}{9}$

۱۷۴. اگر $\frac{m+m+m}{m \times m \times m} = 27$ ، مقدار m می‌تواند کدام باشد؟

- (۱) $\frac{1}{9}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{3}{1}$ (۴) $\frac{9}{1}$ (۵) ۳

۱۷۵. پنج ضلعی روبه‌رو ۳ زاویه قائمه دارد. محیط آن چند واحد است؟



- (۱) ۲۸ (۲) ۳۱ (۳) ۳۲ (۴) ۳۶ (۵) ۴۰

۱۷۶. بزرگ‌ترین عددی که به کمک جمع و تفریق عددهای ۱۷- و ۱۹- و ۲۱- و ... و ۱۰۱- می‌توان به دست آورد، چه عددی است؟

- (۱) ۲۵۳۷ (۲) ۲۳۳۵ (۳) ۱۴۳ (۴) ۲۳۵۰ (۵) ۲۵۰۳

۱۷۷. حاصل کسر زیر برابر با کدام گزینه است؟

$$2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2}}}}$$

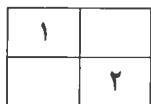
- (۱) $\frac{6}{5}$ (۲) $\frac{7}{5}$ (۳) $\frac{8}{5}$ (۴) $\frac{9}{5}$ (۵) $\frac{10}{5}$

۱۷۸. علامت $\boxed{M > N}$ در نشان می‌دهد عدد خانه M بزرگ‌تر از عدد خانه N است. اگر جدول زیر را با عددهای صحیح ۱-، ۰، ۱ و ۲ پر کنیم، مجموع عددهای خانه‌های A، B، C و D کدام است؟



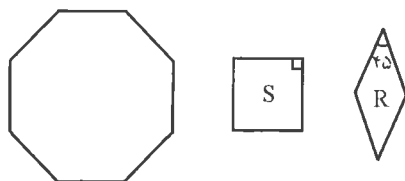
- (۱) ۲- (۲) ۱- (۳) صفر (۴) ۱ (۵) ۲

۱۷۹. جدول روبه‌رو را به چند طریق می‌توان پر نمود که عدد هر خانه مضرب طبیعی عدد خانه بالایی و مضرب طبیعی عدد خانه سمت چپ خود (در صورت وجود) باشد؟



- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴ (۵) صفر

۱۸۰. یک هشت ضلعی منتظم داریم. هم‌چنین دو نوع کاشی S و R:



S: مربعی که طول ضلع آن با طول ضلع هشت‌ضلعی برابر است.

R: یک لوزی که طول ضلع آن با طول ضلع هشت‌ضلعی برابر است و یکی از زاویه‌های آن ۴۵ درجه است. می‌خواهیم هشت ضلعی را با دو نوع کاشی R و S کاشی کنیم. (می‌توان کاشی‌ها را دوران داد و نیز قرینه کرد) در این صورت

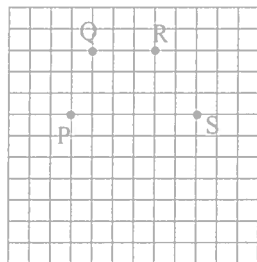
چه تعداد کاشی R لازم است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴ (۵) ۵

۱۸۱. شش تیم A، B، C، D، E و F در یک دوره مسابقه فوتبال شرکت کردند. در این دوره از مسابقات هر دو تیم ۴ بار با یکدیگر مسابقه داده‌اند. اگر تیم‌های A، B، C، D و E به ترتیب ۲۰٪، ۳۰٪، ۳۵٪، ۶۰٪، ۸۰٪ مسابقه‌های خود را برده باشند. تیم F در کل چه مقامی را کسب کرده‌است؟ (تساوی وجود ندارد)

- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم (۵) پنجم

۱۸۲. کدام‌یک از شکل‌های هندسی زیر را می‌توان ترسیم کرد به طوری که هر چهار نقطه P، Q، R و S بر روی محیط آن قرار گرفته باشند.



- (الف) مثلث متساوی‌الاضلاع (ب) مربع (پ) دایره
(۱) ب و پ (۲) الف و پ (۳) الف و ب (۴) هر سه (۵) هیچکدام

۱۸۳. در جشن نوروز سال ۱۳۹۴، تعداد n تا کودک از کشور افغانستان به ایران می‌آیند. هم‌چنین می‌دانیم n تا کودک ایرانی نیز به استقبال آن‌ها می‌روند. هر کودک ایرانی به هر کودک افغانستانی یک شاخه گل هدیه داد. می‌دانیم در کل، تعداد ۵۷۶ تا گل داده شده است. در این صورت n برابر کدام است؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۲۶ (۳) ۲۸ (۴) ۳۰ (۵) ۳۲

۱	۲	۳	۴	۵
۶	۷	۸	۹	۱۰
۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵
۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵

۱۸۴. در این شکل جمع رأس‌های مربع بزرگ ۵۲ است: $(1 + 5 + 25 + 21 = 52)$ چند مربع دیگر به جز مربعی که گفته شد، در شکل می‌توان یافت که جمع رأس‌های آن‌ها ۵۲ شود؟

- ۱ (۱) ۲ (۲)
 ۳ (۳) ۴ (۴)
 ۵ (۵)

۱		۶	
۱۲			
			۱۲

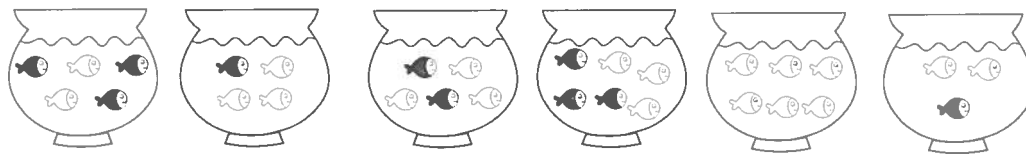
۱۸۵. به چند طریق می‌توان جدول روبرو را پر کرد به طوری که عدد هر خانه، مضرب طبیعی عدد خانه بالایی و مضرب طبیعی عدد خانه چپ خود (در صورت وجود) باشد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲)
 ۳ (۳) ۴ (۴)
 ۴ (۴) ۸ (۸)
 ۶۴ (۶۴)

۱۸۶. قیمت یک تکه الماس با مجذور وزنش رابطه مستقیم دارد. قیمت یک الماس ۱۲ دسی گرمی برابر ۷۲۰۰ دلار است. اگر این الماس به دو تکه با نسبت وزن ۳ به ۱ شکسته شود، چه مقدار خسارت بوجود می‌آید؟

- ۱ (۱) ۲۶۵۰ دلار ۲ (۲) ۲۸۰۰ دلار ۳ (۳) ۲۷۰۰ دلار ۴ (۴) ۲۷۵۰ دلار ۵ (۵) ۲۶۰۰ دلار

۱۸۷. کیانا، لیدا و بهار هر کدام صاحب دو تنگ از شش تنگی هستند که در شکل می‌بینید:



ماهی سیاه‌های کیانا دو برابر ماهی سیاه‌های لیدا است. ماهی‌های لیدا و بهار مساوی است. لیدا چند ماهی سیاه دارد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵)

۱۸۸. برای نوشتن ۹ عدد طبیعی متوالی ۳۱ بار از رقم ۷ استفاده شده است. حداقل مجموع این ۹ عدد، به کدام عدد نزدیک‌تر است؟

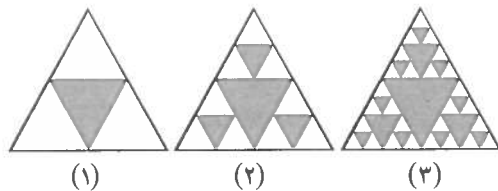
- ۱ (۱) ۷۰۰۰۰۰ ۲ (۲) ۷۰۰۰۰۰۰ ۳ (۳) ۷۰۰۰۰ ۴ (۴) ۷۰۰۰۰۰۰۰ ۵ (۵) ۷۰۰۰

۱۸۹. عددی را مربع خور می‌نامیم اگر اختلاف آن عدد با مقلوبش برابر مربع یک عدد صحیح باشد. چند عدد طبیعی مربع خور کوچک‌تر از ۱۰۰۰ وجود دارد؟

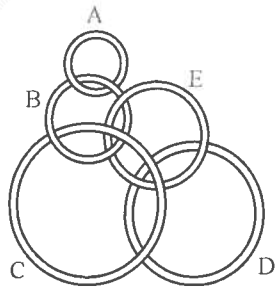
- ۱ (۱) ۹۰ ۲ (۲) ۱۰۰ ۳ (۳) ۱۰۱ ۴ (۴) ۱۲۴ ۵ (۵) ۱۲۵

(مقلوب یک عدد برابر عددی است که از نوشتن ارقام آن عدد به ترتیب عکس به دست می‌آید به عنوان مثال مقلوب عدد ۷۹۱ برابر ۱۹۷ است.)

۱۹۰. اگر مساحت مثلث خاکستری در شکل (۱) برابر 2^0 واحد مربع باشد و در شکل (n) مساحت قسمت سفید برای اولین بار کم‌تر از یک واحد مربع شود، کدام عبارت در مورد n صحیح است؟



- ۱ (۱) $3^{n+1} < 3^{n-5}$: کوچک‌ترین عددی است که
 ۲ (۲) $3^{n+1} < 4^{n-6}$: بزرگ‌ترین عددی است که
 ۳ (۳) $3^n < 4^{n-6}$: کوچک‌ترین عددی است که
 ۴ (۴) $4^n < 3^{n-5}$: بزرگ‌ترین عددی است که
 ۵ (۵) $3^n < 4^{n-5}$: کوچک‌ترین عددی است که



۱۹۱. کدام یک از حلقه‌ها به بقیه وصل نیست؟

- A (۱)
- B (۲)
- C (۳)
- D (۴)
- E (۵)

۱۹۲. کدام عدد از بقیه بزرگ‌تر است؟

$$\frac{۷۶۵۴۳۲۱}{۷۶۵۴۳۲} \quad (۵)$$

$$\frac{۶۵۴۳۲۱}{۶۵۴۳۲} \quad (۴)$$

$$\frac{۵۴۳۲۱}{۵۴۳۲} \quad (۳)$$

$$\frac{۴۳۲۱}{۴۳۲} \quad (۲)$$

$$\frac{۳۲۱}{۳۲} \quad (۱)$$

۱۹۳. حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$۱+۲-۳+۴+۵-۶+۷+۸-۹...+۲۰۸+۲۰۹-۲۱۰$$

$$۲۲۱۵۵ \quad (۵)$$

$$۱۴۷۷۰ \quad (۴)$$

$$۷۳۸۵ \quad (۳)$$

$$۷۲۴۵ \quad (۲)$$

$$۲۴۱۵ \quad (۱)$$

۱۹۴. کدام گزینه از بقیه کوچک‌تر است؟

$$۸-۳\sqrt{۷} \quad (۵)$$

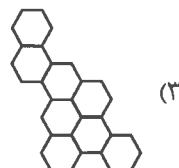
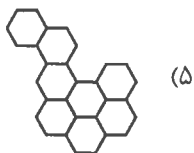
$$۱۰-۳\sqrt{۱۱} \quad (۴)$$

$$۵-۲\sqrt{۶} \quad (۳)$$

$$۹-۴\sqrt{۵} \quad (۲)$$

$$۷-۴\sqrt{۳} \quad (۱)$$

۱۹۵. شکل‌های A و B از شش ضلعی منتظم تشکیل شده‌اند. از کنار هم قرار گرفتن این دو، کدام شکل حاصل نمی‌شود؟



۱۹۶. اگر بدانیم $۴ \rightarrow ۷ \oplus ۳$ یعنی مانند شکل از کنار هم قرار دادن یک سه ضلعی و یک هفت ضلعی (بدون آنکه روی هم بیفتند)



می‌توان یک چهارضلعی ساخت. کدام عبارت زیر غلط است؟

$$۴ \oplus ۸ \rightarrow ۴ \quad (۵)$$

$$۴ \oplus ۶ \rightarrow ۴ \quad (۴)$$

$$۳ \oplus ۵ \rightarrow ۴ \quad (۳)$$

$$۳ \oplus ۶ \rightarrow ۴ \quad (۲)$$

$$۳ \oplus ۸ \rightarrow ۴ \quad (۱)$$

۱۹۷. اگر $M = ۱۳۹۳۱۳۹۴۸ \times ۱۳۹۳۱۳۹۴۷$ و $N = ۱۳۹۳۱۳۹۴۹ \times ۱۳۹۳۱۳۹۴۶$ باشد، آن‌گاه حاصل $M - N$ کدام است؟

$$۱۳۹۳۱۳۹۴۰ \quad (۵)$$

$$۱۳۹۳۱۳۹۴ \quad (۴)$$

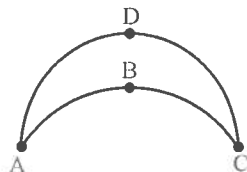
$$۵۵ \quad (۳)$$

$$۲ \quad (۲)$$

$$\text{صفر} \quad (۱)$$

۱۹۸. در شکل روبه‌رو، کمان ABC ربع دایره و کمان ADC نیم‌دایره است. اگر فاصله A از C برابر ۱۸ باشد، مساحت شکل چقدر

است؟



$$۶۳ \quad (۳)$$

$$۵۴ \quad (۲)$$

$$۴۵ \quad (۱)$$

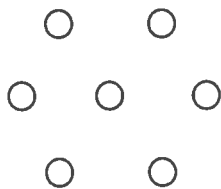
$$۸۱ \quad (۵)$$

$$۷۲ \quad (۴)$$

۱۹۹. پنج دانش آموز کتابشان را به دست سارا سپردند. سپس یکی یکی مراجعه کرده و هر کدام یک کتاب از او گرفتند. بدون آنکه سارا به اسم‌های روی کتاب‌ها توجهی کرده باشد. چقدر احتمال دارد که هر یک کتاب خود را تحویل گرفته باشند؟

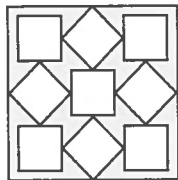
$\frac{1}{5}$ (۱) $\frac{1}{55}$ (۲) $\frac{1}{120}$ (۳) $\frac{1}{10}$ (۴) $\frac{1}{54}$ (۵)

۲۰۰. می‌خواهیم از ۷ دایره شکل زیر، ۴ دایره را طوری رنگ کنیم که شکل حاصل محور تقارن نداشته باشد. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟ (مرکزهای دایره‌ها روی رأس‌های یک شش ضلعی منتظم و مرکز آن قرار دارند)



۱۱ (۱) ۱۲ (۲)
 ۱۳ (۳) ۱۴ (۴)
 ۱۵ (۵)

۲۰۱. در مربع بزرگ روبه‌رو ۹ مربع کوچک قرار دارد. مساحت هر مربع کوچک برابر ۳ است و رأس هر مربع، وسط ضلع مربعی است که به آن چسبیده است. مساحت قسمت رنگی کدام است؟



$\sqrt{288}$ (۱) $\sqrt{322}$ (۲)
 ۱۸ (۳) ۱۶ (۴)
 ۲۷ (۵)

۲۰۲. n برابر است با بزرگ‌ترین عدد صحیح، کوچکتر یا مساوی با عدد n :

برای مثال:

$\triangle_{2/1} = 2$ $\triangle_4 = 4$
 $\triangle_{0/5} = 0$ $\triangle_{-2/1} = -3$

حاصل عبارت زیر چند است؟

$\triangle_{\sqrt{1}} + \triangle_{\sqrt{2}} + \triangle_{\sqrt{3}} + \dots + \triangle_{\sqrt{100}}$

۶۲۵ (۱) ۶۲۶ (۲) ۶۲۷ (۳) ۶۲۸ (۴) ۶۲۹ (۵)

۲۰۳. یک شش ضلعی که تمام زاویه‌هایش کم‌تر از 180° است از کنار هم قرار گرفتن n مثلث متساوی الاضلاع تشکیل شده است. n

کدام عدد نمی‌تواند باشد؟ (در شکل مقابل نمونه‌ای از $n = 8$ را می‌بینید)



۵ (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۹ (۴) ۱۰ (۵)

۲۰۴. در جدول روبه‌رو، عدد هر خانه برابر است با شماره سطر آن خانه به توان شماره ستون

آن خانه. چهارخانه از جدول را انتخاب می‌کنیم، که هیچ دوتایی در یک سطر یا یک

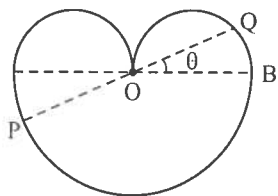
ستون نباشند. اگر m برابر با بیش‌ترین مقدار حاصل جمع آن‌ها و n برابر با کم‌ترین

مقدار حاصل جمع آن‌ها باشد، مقدار $m + n$ کدام است؟

	۱	۲	۳	۴
۱				
۲				
۳				
۴				

۱۴۸ (۱) ۳۱۰ (۲)
 ۳۸۲ (۴) ۳۵۰ (۳)
 ۴۷۶ (۵)

۲۰۵. شکل زیر از سه نیم‌دایره تشکیل شده است که شعاع نیم دایره‌های کوچک نصف شعاع نیم دایره‌ای بزرگ‌تر است. پاره خط PQ (با طول متغیر) از نقطه O عبور کرده است و حول آن می‌چرخد. با افزایش زاویه θ تا 90° ؛ نسبت طول کمان PBQ به قسمت باقیمانده شکل:



(۱) ابتدا بزرگ‌تر از یک است و سپس کاهش می‌یابد.

(۲) ابتدا کوچک‌تر از یک است و پس بزرگ‌تر از یک می‌شود.

(۳) همواره برابر ۲ است.

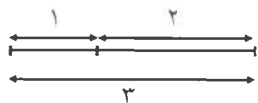
(۴) همواره برابر یک است.

(۵) ابتدا بزرگ‌تر از یک است سپس برابر یک می‌شود.

۲۰۶. تعدادی سنگ قیمتی با وزن‌های متفاوت در اختیار داریم. ۱۰ سنگ سبکتر ۴۰٪ وزن کل سنگ‌ها را تشکیل می‌دهند و ۵ سنگ سنگین‌تر ۲۵٪ وزن سنگ‌ها را تشکیل می‌دهند. تعداد سنگ‌ها کدام عدد است؟

۱۹ (۱) ۲۳ (۲) ۲۷ (۳) ۳۰ (۴) ۳۲ (۵)

۲۰۷. کافی است روی خط کشی به طول ۳ cm فقط جای عدد «۱» را مشخص کنیم تا به کمک آن بتوان تمام طول‌های ۱، ۲، ۳ سانتی‌متر را اندازه گرفت.



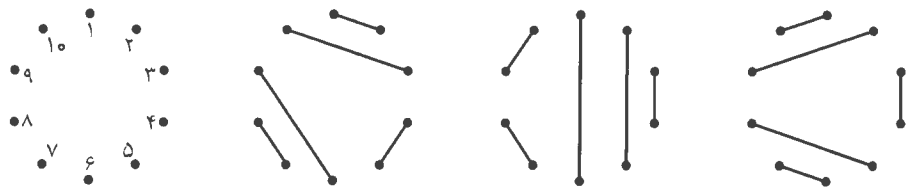
روی خط کشی به طول ۱۲ cm حداقل جای چند عدد را باید مشخص کنیم تا تمام پاره‌خط‌هایی به طول ۱، ۲، ۳، ... و ۱۲ سانتی‌متر را به توان اندازه گرفت؟

۷ (۱) ۶ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵)

۲۰۸. در یک جدول $m \times n$ به تعداد ۱۰۵۶ تا مربع 2×2 دیده می‌شود. در یک جدول $(m+1) \times (n+1)$ هم به تعداد ۱۱۲۵ تا مربع 2×2 دیده می‌شود. حاصل $m+n$ کدام است؟

۶۸ (۱) ۶۹ (۲) ۷۰ (۳) ۷۱ (۴) ۷۲ (۵)

۲۰۹. ده نقطه روی یک دایره قرار گرفته است. می‌خواهیم این نقطه‌ها را دوتا دوتا به هم وصل کنیم به طوری که ۵ پاره‌خط تشکیل شده با هم برخورد نکنند. چند تا از پاسخ‌ها را در شکل زیر می‌بینید. این مساله چند پاسخ دارد؟



۱۰ (۱) ۱۴ (۲) ۲۰ (۳) ۳۶ (۴) ۴۲ (۵)

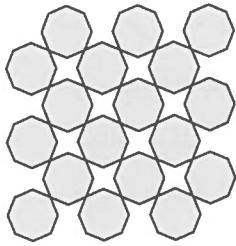
۲۱۰. اگر a یک عدد صحیح زوج باشد $\boxed{a} = \frac{a}{2}$ و اگر a یک عدد صحیح فرد باشد، $\boxed{a} = a + 3$. معادله $\boxed{\boxed{x}} = 14$ چند جواب دارد؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۸ (۵)

۲۱۱. در یک کشور از هر شهر به نزدیکترین شهر در آن کشور یک خط هوایی وجود دارد. اگر در این کشور فاصله هیچ دو شهری یکسان نباشد، در یک شهر حداکثر چند خط هوایی می‌تواند وجود داشته باشد؟

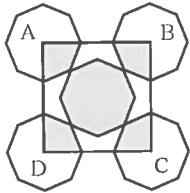
۱ (۱) ۲ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۵ (بیش‌تر از ۶)

۲۱۲. شکل روبه‌رو یک الگوی کاشی کاری را نشان می‌دهد که از کنار هم قرار دادن هشت ضلعی‌های منتظم حاصل شده است:



رأس‌های مربع ABCD منطبق بر مرکز چهار تا از هشت ضلعی‌ها است. در این صورت چه کسری از مساحت مربع ABCD رنگی است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
 (۲) $\frac{\sqrt{2}}{4}$
 (۳) $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$
 (۴) $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$
 (۵) $\frac{2+2\sqrt{2}}{4}$



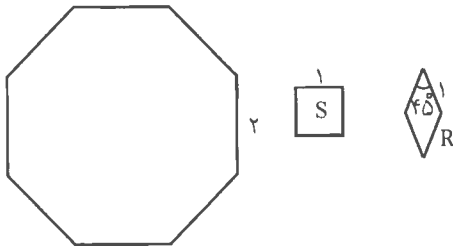
۲۱۳. دنباله‌ای از عددها به این شکل تشکیل شده است که هر عدد منتهای عدد قبلی می‌شود تا عدد بعدی به دست آید. به عنوان مثال سه عدد اول دنباله به این شکل هستند:

$a, b, b - a, \dots$

اگر مجموع اولین عدد تا ۱۳۹۳ امین عدد این دنباله برابر ۲۰۱۵ و مجموع اولین عدد تا ۲۰۱۵ امین عدد این دنباله برابر ۱۳۹۳ باشد. مجموع اولین عدد تا ۸۵۰ امین عدد این دنباله چند است؟

- (۱) ۴۸۰۱ (۲) ۳۴۰۸ (۳) ۳۲۱۸ (۴) ۷۶۰۳ (۵) ۸۷۲۳

۲۱۴. یک هشت ضلعی منتظم به طول ضلع ۲ داریم. همچنین دو نوع کاشی S و R:



S - مربعی به طول ضلع ۱ است.

R - یک لوزی با طول ضلع ۱ است که یکی از زاویه‌های آن ۴۵ درجه است.

می‌خواهیم هشت ضلعی را با دو نوع کاشی S و R (می‌توان کاشی‌ها را

دوران داد و نیز قرینه کرد) در این صورت چه تعداد کاشی R لازم است؟

- (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۲ (۵) ۱۶

۲۱۵. اگر P کوچک‌ترین مضرب مشترک عددهای $A = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$ باشد، چند تا از مقسوم‌علیه‌های P دقیقاً بر ۱۸ تا از عضوهای مجموعه A بخش‌پذیر هستند؟

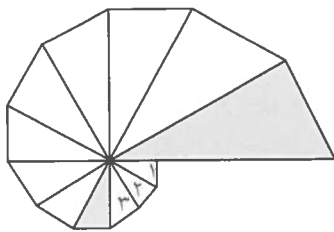
- (۱) ۵ (۲) ۹ (۳) ۱۳ (۴) ۱۷ (۵) ۲۱

۲۱۶. برای دو عدد طبیعی a و b کدام عبارت زیر می‌تواند درست باشد؟

- (۱) $a + b = a - b$ (۲) $a - b = a \times b$ (۳) $a + b = a \div b$ (۴) $a - b = a \div b$ (۵) $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

۲۱۷. زاویه همه مثلث‌های زیر ۳۰، ۶۰، ۹۰ درجه است. یک رأس همه آن‌ها روی هم قرار دارد و وتر هر مثلث برابر ضلع بزرگ‌تر مجاور به

زاویه قائمه از مثلث بعدی است. چهارمین و آخرین مثلث رنگ شده‌اند. نسبت محیط این دو مثلث به صورت $\frac{m}{n}$ ساده شده است.



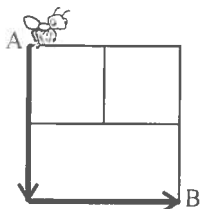
m و n نسبت به هم اولند. کدام است $m + n$ ؟

- (۱) ۵۹ (۲) ۱۱۳ (۳) ۱۶۷ (۴) ۲۷۳ (۵) ۳۳۷

۲۱۸. مضرب کدامیک از عددهای زیر است؟

- ۴۵ (۵) ۴۴ (۴) ۴۳ (۳) ۴۲ (۲) ۴۱ (۱)

۲۱۹. مورچه کوچولو می‌خواهد از کوتاه‌ترین مسیر از A به B برود. یکی از مسیرهایی که مورچه می‌تواند طی کند، در شکل مشخص شده است. کل تعداد راه‌های مورچه برای رسیدن از A به B چندتا است؟



- ۱ (۱)
۲ (۲)
۳ (۳)
۴ (۴)
۵ (۵)

۲۲۰. حاصل کدامیک از عبارتهای زیر عددی صحیح است؟

$$\frac{1392}{1+3+9+2} \quad (2)$$

$$\frac{1394}{1+3+9+4} \quad (4)$$

$$\frac{1391}{1+3+9+1} \quad (1)$$

$$\frac{1393}{1+3+9+3} \quad (3)$$

$$\frac{1395}{1+3+9+5} \quad (5)$$

۲۲۱. رقم‌های صفر تا ۹ را در ماشین حساب نمایش داده‌ایم.



مرکز تقارن است
مرکز تقارن نیست

برای مثال در میان این رقم‌ها، عدد صفر مرکز تقارن دارد و عدد ۱ مرکز تقارن ندارد. چند تا از این رقم‌ها مرکز تقارن دارند؟

- ۵ (۵) ۴ (۴) ۳ (۳) ۲ (۲) ۶ (۱)

۲۲۲. اگر a برابر مربع a باشد، کدام عبارت برابر a^6 است؟

$$a \times a \quad (3)$$

$$a \quad (2)$$

$$3 \times a \quad (1)$$

$$a \times a \quad (5)$$

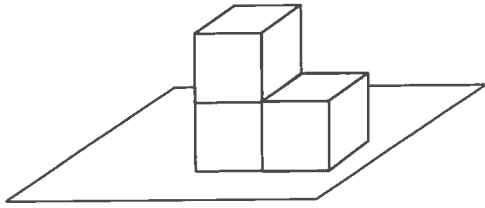
$$a^6 \quad (4)$$

۲۲۳. عددهای «کسل‌کننده» به عددهایی می‌گوییم که یا یک رقمی هستند یا همه رقم‌هایشان یکسان است! چند تا از عددهای ۱ تا

۱۰۰۰۰ هم کسل‌کننده و هم اول هستند؟

- ۵ (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۵ (۵)

۲۲۴. سه تاس بر روی زمین به شکل زیر چیده شده‌اند. (عددهای روی آن‌ها را نمایش نداده‌ایم) اگر در این تاس‌ها وجه روبه‌روی ۶ عدد ۱ و روبه‌روی ۵ عدد ۲ و روبه‌روی ۴ عدد ۳ باشد، بیش‌ترین مقدار حاصل جمع عددهای روی ۱۲ وجهی که دیده می‌شوند، چند است؟



- ۴۸ (۱)
- ۵۱ (۲)
- ۴۹ (۳)
- ۴۷ (۴)
- ۵۲ (۵)

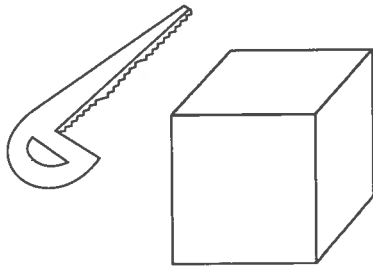
۲۲۵. اگر n عددی طبیعی باشد، بین $2n - 2$ و $3n + 5$ چند عدد طبیعی مختلف وجود دارد؟

- $2n + 1$ (۵)
- $n + 9$ (۴)
- $n + 7$ (۳)
- $n + 6$ (۲)
- $n + 5$ (۱)

۲۲۶. عددهای «پُر دهه» به عددهایی گفته می‌شود که دورقمی باشند و دهگان آن‌ها از یکانشان بزرگ‌تر باشد، برای مثال ۳۰، ۸۳ و ۴۱ عددهای «پُر دهه» هستند. چند عدد «پُر دهه» وجود دارد؟

- ۵۰ (۱)
- ۲۴ (۲)
- ۳۶ (۳)
- ۴۵ (۴)
- ۵۴ (۵)

۲۲۷. یک مکعب چوبی در دست اوستا نجار است. او به کمک ارّه خود به چند طریق می‌تواند آن را به دو بخش کاملاً یکسان ببرد؟

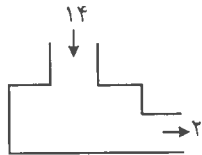


- ۲ (۱)
- ۳ (۲)
- ۶ (۳)
- ۹ (۴)
- بی‌شمار (۵)

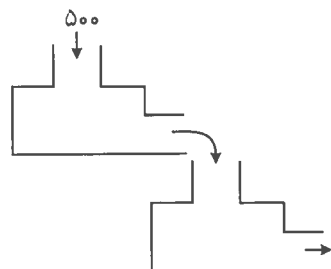
۲۲۸. عددهای متمایز A ، B ، C و D همان عددهای ۱، ۲، ۳ و ۴ هستند. بیش‌ترین مقدار ممکن $(A^B + B^C + C^D)$ کدام است؟

- ۹۹ (۵)
- ۹۸ (۴)
- ۹۳ (۳)
- ۹۰ (۲)
- ۸۶ (۱)

۲۲۹. ماشین شکل زیر، پس از دریافت عددی دلخواه مانند A ، تعداد مضرب‌های طبیعی ۶ که از A کوچک‌ترند را مانند نمونه تحویل می‌دهد.



اگر به ماشین‌های زیر عدد ۵۰۰ را تحویل دهیم، خروجی نهایی چه خواهد بود؟



- ۱۴ (۱)
- ۱۳ (۲)
- ۸۳ (۳)
- ۱۲ (۴)
- ۷۵ (۵)

۲۳۰. حاصل جمع همهی عددهای سه رقمی را که با سه رقم ۱، ۲ و ۳ ساخته شده‌اند، به دست آورده‌ایم:

$$۱۲۳ + ۱۳۲ + ۲۱۳ + ۲۳۱ + ۳۱۲ + ۳۲۱ = ۱۳۳۲$$

حاصل جمع همهی عددهای چهار رقمی که با چهار رقم ۱، ۲، ۳ و ۴ ساخته می‌شوند، برابر با کدام گزینه است؟

۱۱۹۸۸ (۱) ۳۵۹۶۴ (۲) ۴۴۴۴۰ (۳) ۶۶۶۶۰ (۴) ۸۳۳۲ (۵)

۲۳۱. چند عدد چهار رقمی با رقم‌های متمایز و مخالف صفر وجود دارد، به طوری که در آن‌ها یکی از رقم‌ها برابر مجموع سه رقم دیگر باشد؟

۱۴۴ (۱) ۱۶۸ (۲) ۱۹۲ (۳) ۲۱۶ (۴) ۲۴۰ (۵)

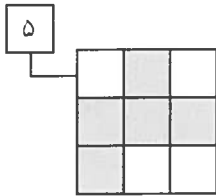
۲۳۲. فرض کنید a ، b ، c و d چهار عدد طبیعی متمایز باشند. عبارتهای زیر چند مقدار مختلف را نشان می‌دهند؟

$$a \div (b \div (c \div d)) \quad , \quad (a \div b) \div (c \div d) \quad , \quad ((a \div b) \div c) \div d \quad , \quad (a \div (b \div c)) \div d \quad , \quad a \div ((b \div c) \div d)$$

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵)

۲۳۳. جدول 3×3 زیر را در نظر بگیرید. در هر مرحله می‌توان ۳ خانه سفید را سیاه کرد یا ۷ خانه سیاه را سفید کرد. بر روی این جدول یک نمایش گر نصب شده است که تعداد خانه‌های سیاه را نمایش می‌دهد. اگر در ابتدا نمایش گر عدد ۵ را نشان دهد، پس از چند مرحله، مجموع تمام عددهایی که روی نمایش گر نقش بسته است، بیش تر از ۱۰۰ خواهد شد؟

- ۱۵ (۱)
۲۱ (۲)
۴۵ (۳)
۳۲ (۴)
۲۵ (۵)



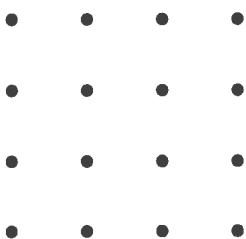
۲۳۴. عددهای ۴۶ و ۹۶ خاصیت جالبی دارند: اگر جای رقم‌های آن‌ها را عوض کنیم، حاصل ضرب آن‌ها تغییر نمی‌کند.

$$۴۶ \times ۹۶ = ۶۴ \times ۶۹ = ۴۴۱۶$$

بهار دو عدد دو رقمی دیگر با همین خاصیت پیدا کرد و یکی از آن‌ها را به ما گفت. اکنون می‌دانیم که یکی از این دو عدد ۳۴ است. مجموع رقم‌های عدد دیگر می‌تواند کدام گزینه باشد؟

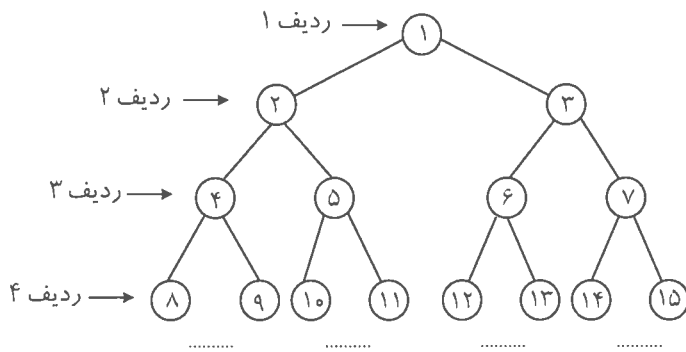
۱۱ (۱) ۱۲ (۲) ۱۳ (۳) ۱۴ (۴) ۱۵ (۵)

۲۳۵. از به هم وصل کردن نقطه‌های شبکه زیر چند مربع با ضلع‌های مورب (غیرافقی و غیرعمودی) می‌توان رسم کرد؟



- ۱) هیچ
۲) ۴
۳) ۶
۴) ۷
۵) ۸

۲۳۶. عددهای طبیعی به صورت زیر، تشکیل یک خانواده داده‌اند. با توجه به الگوی آن‌ها، عدد ۱۳۹۴ در ردیف چندم قرار می‌گیرد؟

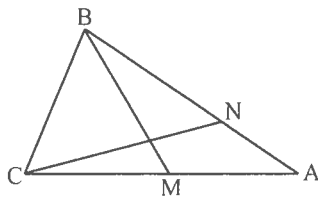


- ۶۹۷ (۱)
- ۱۰ (۲)
- ۱۱ (۳)
- ۱۲ (۴)
- ۲۰ (۵)

۲۳۷. آراد، بهرام و یاسین با هم پسرخاله هستند و هر کدام ۲ تا خاله دارند. می‌دانیم آراد ۱۳ تا پسرخاله، بهرام ۱۶ تا پسرخاله و یاسین ۱۵ تا پسرخاله دارد. آراد چند برادر دارد؟

- ۱۱ (۵)
- ۱۰ (۴)
- ۹ (۳)
- ۸ (۲)
- ۷ (۱)

۲۳۸. در شکل زیر، نقطه‌های M و N دلخواه و بر روی ضلع‌های مثلث هستند. اگر $\widehat{BCN} = 6x^\circ$ ، $\widehat{BNC} = 4x^\circ$ ، $\widehat{CMB} = \widehat{MBC} = 5x^\circ$ و $\widehat{A} = 3^\circ$ باشد، زاویه \widehat{ABC} چند درجه است؟



- ۸۳ (۱)
- ۷۲ (۲)
- ۷۵ (۳)
- ۶۴ (۴)
- ۸۱ (۵)

۲۳۹. ۱۴ کارت روی میز قرار دارد. ایمان در هر روز باید روی ۵ یا ۶ کارت یک علامت بزند. حداقل بعد از چند روز همه کارت‌ها تعداد علامت‌های برابر دارند؟

- ۸ (۵)
- ۷ (۴)
- ۶ (۳)
- ۵ (۲)
- ۴ (۱)

۲۴۰. ۱۶ سکه شبیه به هم داریم که وزن هیچ دو تایی برابر نیست. برای اینکه دو سکه سنگین‌تر را پیدا کنیم، حداقل چند بار باید از یک ترازوی دوکفه‌ای استفاده کنیم؟

- ۲۲ (۵)
- ۱۸ (۴)
- ۱۷ (۳)
- ۱۶ (۲)
- ۱۵ (۱)

۲۴۱. ۲۰ توپ با شماره‌های ۱, ۲, ۳, ..., ۲۰ داریم. آن‌ها را درون چند جعبه ریخته‌ایم، به طوری که در هیچ جعبه‌ای هیچ دو تویی وجود ندارند که شماره یکی بر شماره دیگری بخش‌پذیر باشد. حداقل تعداد جعبه‌ها کدام است؟

- ۱۰۱۰ (۵)
- ۱۰۱ (۴)
- ۸۱ (۳)
- ۲۰ (۲)
- ۱۱ (۱)

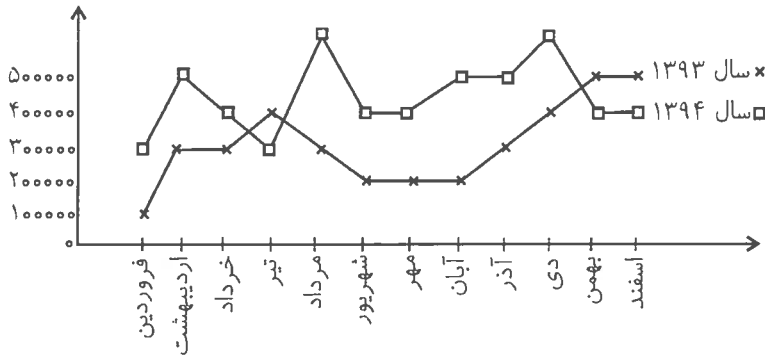
۲۴۲. حاصل عبارت $1 + \frac{1}{99} + \frac{1}{99} + \frac{1}{99} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{99}$ کدام است؟

- ۵۰۵۰ (۵)
- ۵۰۵ (۴)
- ۵۰/۵ (۳)
- ۵۰ (۲)
- ۵ (۱)

۲۴۳. دو سکه را پرتاب کردیم و هر دو سکه «رو» آمد. اگر مجدداً سکه‌ها را پرتاب کنیم، چه قدر احتمال دارد دوباره هر دو سکه «رو» بیاید؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{0}{4}$ (۵) ۱

۲۴۴. سود ماهانه یک شرکت در دو سال اخیر در نمودار زیر نمایش داده شده است. درصد افزایش سود در کدام ماه نسبت به همان ماه در سال گذشته بیش تر بوده است؟



- (۱) فروردین
(۲) اردیبهشت
(۳) مرداد
(۴) مهر
(۵) آبان

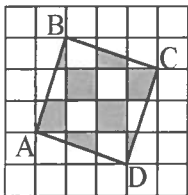
۲۴۵. حاصل عبارت 20^{16} چند رقم دارد؟

- (۱) ۱۷ (۲) ۱۸ (۳) ۱۹ (۴) ۲۰ (۵) ۲۱

۲۴۶. میانگین سه عدد برابر ۶۸ است. عدد دوم از دو برابر عدد اول یکی بیش تر است و عدد سوم از سه برابر عدد اول، ۷ تا کمتر است. عدد بزرگ تر کدام است؟

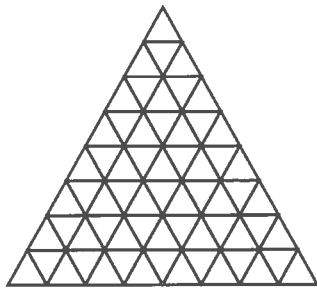
- (۱) ۷۲ (۲) ۸۱ (۳) ۹۱ (۴) ۹۸ (۵) ۱۰۵

۲۴۷. در مربع ABCD نسبت مساحت ناحیه رنگی به مساحت ناحیه سفید کدام است؟



- (۱) $\frac{3}{7}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{1}{1}$ (۵) $\frac{7}{3}$

۲۴۸. در شکل زیر، چند شش ضلعی منتظم دیده می شود؟



- (۱) ۲۷ (۲) ۲۹ (۳) ۳۱ (۴) ۳۳ (۵) ۳۵

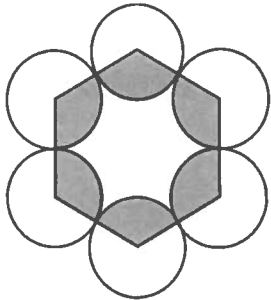
۲۴۹. دو عدد طبیعی هستند و $\frac{3}{5} < \frac{a}{b} < \frac{7}{12}$. کدام گزینه نمی تواند به جای b قرار بگیرد؟

- (۱) ۲۹ (۲) ۳۰ (۳) ۹۹ (۴) ۱۰۰ (۵) ۱۲۰

۲۵۰. اگر $a = \frac{1}{1395}$ ، $b = \frac{1394}{1393 \times 1395}$ و $c = \frac{1}{1394}$ باشد، کدام گزینه درست است؟

- (۱) $a < b < c$ (۲) $c < b < a$ (۳) $b < a < c$ (۴) $a < c < b$ (۵) $b < c < a$

۲۵۱. مرکزهای ۶ دایره به شعاع ۱ به هم متصل شده‌اند و یک شش ضلعی ساخته‌اند. مساحت ناحیه رنگی کدام است؟



(۱) π

(۲) 2π

(۳) 3π

(۴) 4π

(۵) اطلاعات مسئله ناقص است.

۲۵۲. یک دوازده ضلعی منتظم به طول ضلع ۱ داریم. سطح داخل دوازده ضلعی را با کاشی‌هایی به شکل مربع و مثلث متساوی‌الاضلاع

(هر دو به ضلع ۱) پر کرده‌ایم. یعنی کل سطح پر شده است و کاشی‌ها هم‌پوشانی ندارند. تعداد مربع‌ها و مثلث‌های متساوی‌الاضلاع

به ترتیب کدام است؟

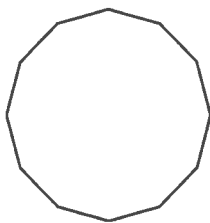
(۱) ۹ و ۶

(۲) ۱۲ و ۶

(۳) ۹ و ۹

(۴) ۳ و ۱۲

(۵) ۱۲ و ۹



۲۵۳. یک مربع به طول ضلع ۱۳ داریم. یک ربع دایره به مرکز B رسم کرده‌ایم. فاصله نقطه E از ضلع AD برابر ۱ است. فاصله این

نقطه از ضلع CD (یعنی X) چه قدر است؟

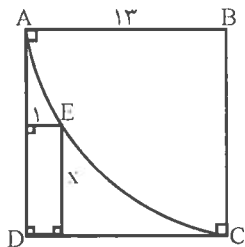
(۱) ۳

(۲) ۵

(۳) ۸

(۴) ۷

(۵) ۹



۲۵۴. اگر $\frac{1+4+7+10+\dots+(3n+1)}{1+7+13+19+\dots+(6n+1)} = \frac{13}{25}$ باشد، آن‌گاه مقدار n کدام است؟

(۱) ۱۲

(۲) ۱۱

(۳) ۱۰

(۴) ۹

(۵) ۸

۲۵۵. عددهای کمال طلب به عددی گفته می‌شود که رقم‌های آن‌ها از چپ به راست افزایش می‌یابد. برای مثال ۵۸ و ۱۳۷۸۹

کمال طلب هستند، اما ۴۴۸ کمال طلب نیست. چند عدد هفت رقمی کمال طلب وجود دارد؟

(۱) ۴۵

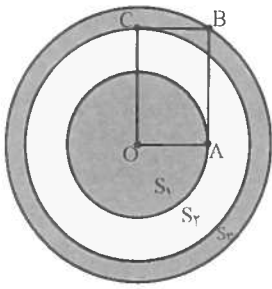
(۲) ۳۶

(۳) ۲۴

(۴) ۱۲

(۵) ۹

۲۵۶. در شکل زیر، OABC مستطیل است و مرکز هر سه دایره نقطه O است. مساحت هر قسمت را با S نمایش داده ایم. کدام گزینه همیشه درست است؟



$S_1 > S_2$ (۲)

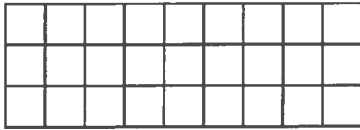
$S_1 = S_3$ (۴)

$S_1 = S_2$ (۱)

$S_2 > S_3$ (۳)

$S_1 > S_3$ (۵)

۲۵۷. مطابق شکل زیر، یک مستطیل 3×9 داریم. یک لوزی با بیشترین مساحت درون آن قرار دارد. (یعنی به طور کامل درون مستطیل جای می‌گیرد.) مساحت این لوزی کدام است؟



$13 \frac{2}{3}$ (۵)

۱۵ (۴)

$17 \frac{2}{3}$ (۳)

۲۰ (۲)

۲۵ (۱)

۲۵۸. برای هر عدد طبیعی n عبارت S(n) را کوچک‌ترین مضرب مشترک عددهای ۱ تا n می‌نامیم. برای مثال $S(5) = 60$. چند عدد n از ۱ تا ۵ وجود دارد که $S(n) = S(n+4)$ باشد؟

پنج (۵)

چهار (۴)

سه (۳)

دو (۲)

یک (۱)

۲۵۹. در دایره‌ای به شعاع ۱۷cm، نقطه P به فاصله ۱۵cm از مرکز قرار دارد. چند وتر متمایز از این دایره وجود دارند که از نقطه P می‌گذرند و طول آن‌ها یک عدد طبیعی است؟

۳۶ (۵)

۳۴ (۴)

۲۸ (۳)

۱۹ (۲)

۱۰ (۱)

۲۶۰. علی و بابک و پرهام در پارک ایستاده‌اند، بابک و پرهام در یک نقطه و علی ۱۰ متر آن طرف‌تر از آن‌ها ایستاده است. بابک به‌طور تصادفی به یک سمت حرکت می‌کند و به اندازه ۱۰ متر از پرهام فاصله می‌گیرد. چه قدر احتمال دارد که فاصله بابک تا علی کمتر از فاصله پرهام تا علی باشد؟

$\frac{1}{6}$ (۵)

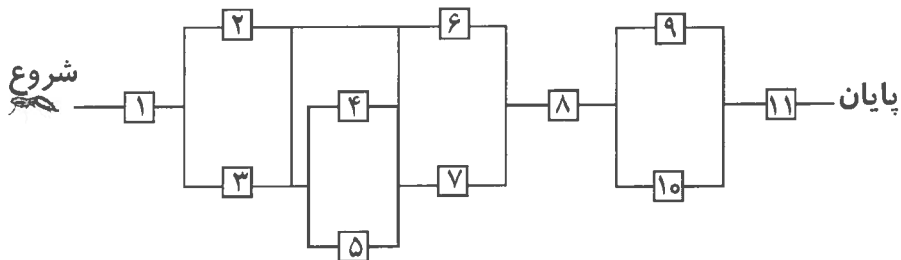
$\frac{1}{4}$ (۴)

$\frac{1}{8}$ (۳)

$\frac{1}{3}$ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

۲۶۱. قرار است موربانه‌ای شبکه اعداد زیر را طی کند. به این صورت که از خانه شماره ۱ شروع کرده و از خانه شماره ۱۱ خارج شود. این موربانه از روی خط‌های شبکه حرکت می‌کند و تنها به خانه‌ای با شماره بیشتر از آن خانه‌ای که قرار دارد، می‌رود. چند درصد احتمال دارد مجموع عددهایی که موربانه از آن‌ها گذشته است فرد باشد؟



۸۰٪ (۵)

۲۵٪ (۴)

۴۰٪ (۳)

۷۵٪ (۲)

۵۰٪ (۱)

۲۶۲. باقی‌مانده تقسیم $7^7 \times 5^5 \times 3^3 \times 2^2$ بر ۸ چیست؟

۵ (۵)

۴ (۴)

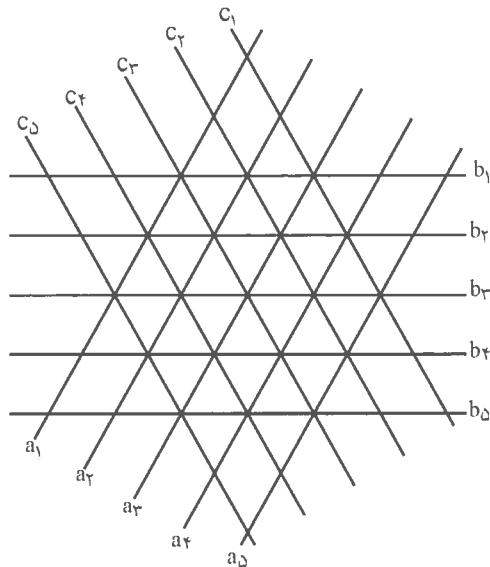
۳ (۳)

۲ (۲)

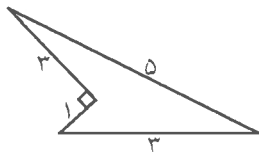
۷ (۱)

۲۶۳. کیهان یکی از خط‌های a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 را انتخاب می‌کند، سروش یکی از خط‌های b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 را انتخاب می‌کند

و اشکان یکی از خط‌های c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 را انتخاب می‌کند. احتمال این‌که هر سه خط آن‌ها از یک نقطه بگذرد چه قدر است؟

 $\frac{25}{5^3}$ (۱) $\frac{19}{5^3}$ (۲) $\frac{61}{5^3}$ (۳) $\frac{42}{5^3}$ (۴) $\frac{49}{5^3}$ (۵)

۲۶۴. مساحت چهارضلعی زیر کدام است؟



۲ (۲)

۱ (۱)

۴ (۴)

۳ (۳)

۵ (۵)

۲۶۵. تعداد عددهای طبیعی سه رقمی که ۱۳ برابر مجموع رقم‌هایشان هستند، چندتا است؟

صفر (۵)

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۲۶۶. شکل زیر از خانه‌هایی به شکل «مربع» و «مثلث» تشکیل شده است.

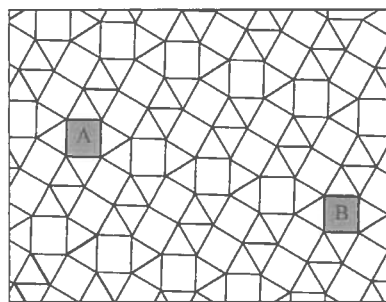
یک مورچه باهوش در خانه A قرار دارد. او می‌خواهد با یک مسیر به خانه B برود. مسیر او باید این‌گونه باشد:

- از هر خانه به یک خانه مجاور می‌تواند برود. (دو خانه مجاور یک ضلع مشترک دارند).

- از یک خانه مربع باید به یک خانه مثلث مجاور برود.

- از یک خانه مثلث باید به یک خانه مربع مجاور برود.

چند مسیر مختلف از A به B وجود دارد؟



۱۶ (۲)

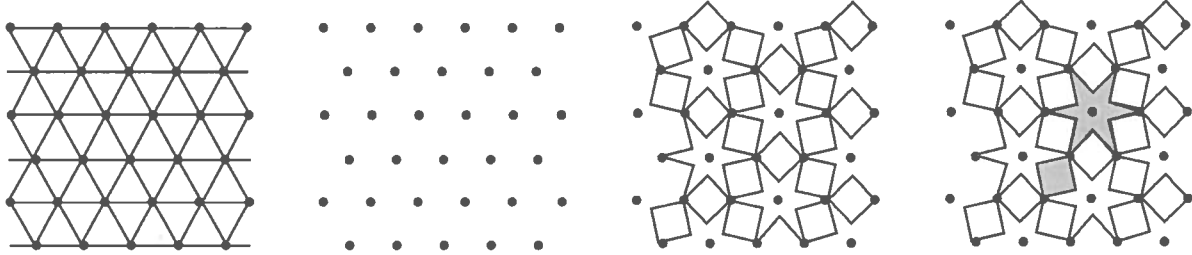
۲۴ (۱)

۴ (۴)

۸۱ (۳)

۱۵ (۵)

۲۶۷. شبکه‌ای متشکل از مثلث‌های متساوی‌الاضلاع داریم. به کمک رأس‌های آن یک الگوی کاشی‌کاری ساخته‌ایم. این الگو از «مربع‌ها» و «ستاره‌ها» تشکیل شده است. اگر مساحت یک مربع ۲ باشد، مساحت ستاره رنگ شده کدام است؟



$3\sqrt{3} + 6$ (۵)

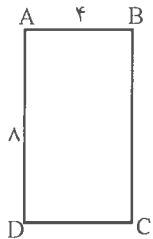
$3\sqrt{3} + 3$ (۴)

$18 - 6\sqrt{3}$ (۳)

$6\sqrt{3} - 6$ (۲)

$6\sqrt{3} - 3$ (۱)

۲۶۸. مستطیل کاغذی زیر را طوری تا می‌کنیم که روی C روی A قرار بگیرد. طول خط تا چه قدر است؟



$3\sqrt{2}$ (۲)

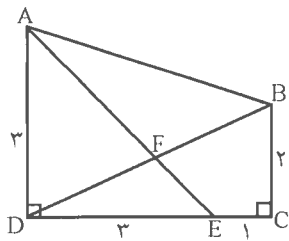
$2\sqrt{5}$ (۱)

$1 + 2\sqrt{3}$ (۴)

$3\sqrt{3}$ (۳)

$2 + \sqrt{5}$ (۵)

۲۶۹. در شکل زیر، ABCD یک دوزنقه قائم‌الزاویه است که در آن داریم: $AD = 3, DE = 3, CE = 1, BC = 2$. مساحت مثلث



ABF کدام است؟

$2/5$ (۱)

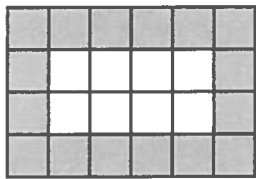
۳ (۲)

$3/5$ (۳)

۴ (۴)

$4/5$ (۵)

۲۷۰. سطح مستطیلی به طول ۶ و عرض ۴ را با ۱۶ کاشی رنگی و ۸ کاشی سفید پر کرده‌ایم به طوری که کاشی‌های رنگی دور تا دور کاشی‌های سفید داخل مستطیل قرار گرفته‌اند. اگر همه مستطیل‌هایی را که اندازه ضلع آن‌ها عددی طبیعی است، به همین ترتیب با دو رنگ کاشی پر کنیم، چند مستطیل وجود دارد که برای پر کردن آن‌ها به تعداد مساوی کاشی سفید و رنگی لازم باشد؟



۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

صفر (۵)

۲۷۱. چهار هفت تیرکش روی چهار رأس یک مربع ایستاده‌اند. هریک از آن چهار نفر در یک لحظه به طور تصادفی یکی از ۳ نفر دیگر را انتخاب کرده و به سمت او شلیک می‌کند و قطعاً او را می‌کشد. چند درصد احتمال دارد که هر چهار نفر کشته شوند؟

66% (۵)

45% (۴)

30% (۳)

25% (۲)

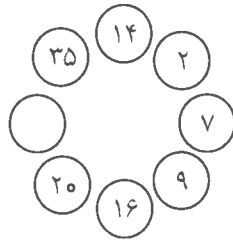
11% (۱)

۲۷۲. چند تا از عددهای زیر طبیعی هستند؟

(الف) $\frac{1+2+3}{4}$ (ب) $\frac{1+2+3+4}{5}$ (ج) $\frac{1+2+3+4+5}{6}$ (د) $\frac{1+2+3+4+5+6}{7}$

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴ (۵) ۵

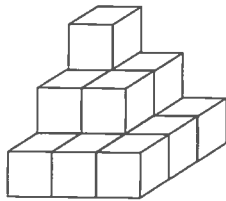
۲۷۳. در شکل زیر حاصل جمع هر دو عدد کنار هم، مربع کامل است. (مثلاً $۲+۷=۹$ و $۱۴+۲=۱۶$) چه عددی در جای خالی قرار



می‌گیرد؟

- (۱) ۵ (۲) ۱۴ (۳) ۱۶ (۴) ۲۹ (۵) ۴۶

۲۷۴. حجم مقابل از ۱۴ مکعب به طول واحد ساخته شده است. اگر این حجم را در قوطی رنگ بیاندازیم چه مساحتی رنگی خواهد شد؟

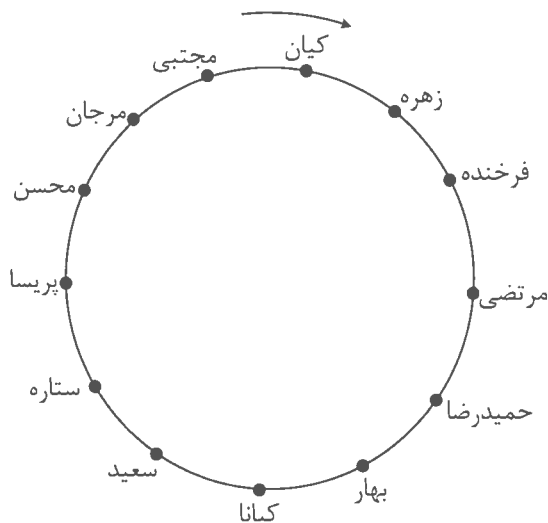


- (۱) ۳۰ (۲) ۳۳ (۳) ۳۶ (۴) ۳۹ (۵) ۴۲

۲۷۵. ۱۳ نفر دور یک میزگرد نشسته‌اند. با شروع از کیان و شمارش در جهت مشخص شده، چهارمین نفر از کنار میز بلند می‌شود و این

کار به همین صورت ادامه می‌یابد. به‌عنوان مثال اولین نفری که از سر میز بلند می‌شود مرتضی و نفر بعدی سعید است. چه کسی در

انتها کنار میز باقی می‌ماند؟



- (۱) حمیدرضا (۲) بهار (۳) مرجان (۴) پریسا (۵) مجتبی

۲۷۶. عددی را «جالب‌انگیز» می‌گوییم اگر مجموع شمارنده‌هایش از حاصل ضرب شمارنده‌هایش بزرگ‌تر باشد. کوچک‌ترین عدد

«جالب‌انگیز» بزرگ‌تر از ۵۰ کدام است؟

- (۱) ۵۱ (۲) ۵۳ (۳) ۵۵ (۴) ۵۷ (۵) ۵۹

۲۷۷. حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{3}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{4}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{5}} \times \dots \times \frac{1}{1-\frac{1}{100}}$$

- ۱۰۰ (۱) ۹۹ (۲) $\frac{1}{100}$ (۳) $\frac{1}{99}$ (۴) ۱۰۱ (۵)

۲۷۸. دو نفر به نام‌های A و B در یک شرکت همکار هستند.

A: $\frac{12}{17}$ از همکارهای من خانم هستند.

B: $\frac{5}{7}$ از همکارهای من خانم هستند.

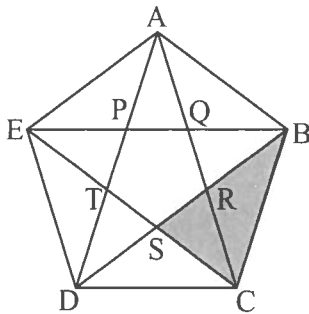
در این صورت کدام گزینه درست است؟

- (۱) A خانم و B آقا است.
 (۲) A خانم است و B را نمی‌توان مشخص کرد.
 (۳) A را نمی‌توان مشخص کرد ولی B خانم است.
 (۴) A آقا و B خانم است.
 (۵) A را نمی‌توان مشخص کرد، ولی B آقا است.

۲۷۹. مجموع ۲۰ عدد صحیح متوالی برابر ۱۰ است. مجموع رقم‌های بزرگ‌ترین عدد در بین این ۲۰ عدد کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۱ (۵)

۲۸۰. در شکل زیر، ABCDE یک پنج‌ضلعی منتظم است. در این شکل چند مثلث هم‌نهشت با مثلث BCS دیده می‌شود؟ (خود



BCS را هم بشمارید.)

- ۵ (۱)
 ۱۰ (۲)
 ۱۵ (۳)
 ۲۰ (۴)
 ۲۵ (۵)

۲۸۱. عددهای زیر را در نظر بگیرید:

$$2 \times 3 \times 5 \quad 3 \times 5 \times 7 \quad 5 \times 7 \times 11 \quad 7 \times 11 \times 2 \quad 11 \times 2 \times 3$$

امین دو عدد a و b را از بین آن‌ها طوری انتخاب کرد که $[a, b] = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$. حاصل (a, b) کدام می‌تواند باشد؟

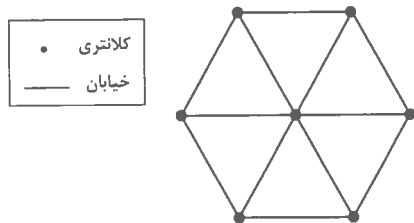
- ۶ (۱) ۲۲ (۲) ۵ (۳) ۳۰ (۴) ۷۷ (۵)

۲۸۲. حاصل جمع رقم‌های یک عدد ۲ برابر حاصل ضرب رقم‌هایش است. حاصل ضرب رقم‌های کوچک‌ترین عدد چهار رقمی با این

خاصیت کدام است؟

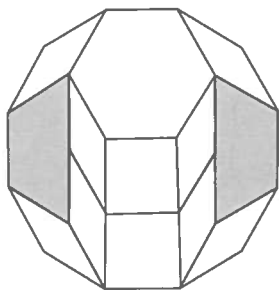
- ۶ (۱) ۷ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵)

۲۸۳. نقشه راه‌های روستای «پلیس آباد» به شکل روبه‌رو است. این روستا ۱۲ خیابان و ۷ کلانتری دارد. هر پلیس که در یکی از کلانتری‌ها باشد از تمام خیابان‌های منتهی به کلانتری محافظت می‌کند. دست کم چند پلیس در کلانتری‌ها قرار گیرند تا هر خیابان تحت نظارت ۶ پلیس باشد؟



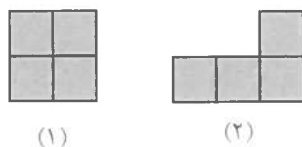
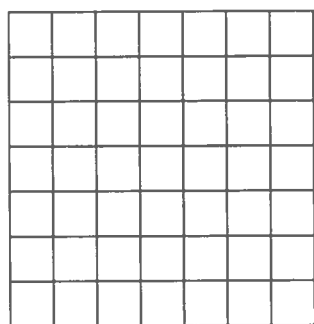
- (۱) ۱۸
- (۲) ۲۱
- (۳) ۲۴
- (۴) ۳۶
- (۵) ۷۲

۲۸۴. یک دوازده‌ضلعی منتظم را به تعدادی مربع، لوزی، شش‌ضلعی منتظم و دوزنقه تقسیم کرده‌ایم. اندازه زاویه تند در دوزنقه کدام است؟



- (۱) ۴۰
- (۲) ۵۰
- (۳) ۶۰
- (۴) ۷۰
- (۵) ۸۰

۲۸۵. می‌خواهیم جدول 7×7 زیر را با کمک قطعه‌های (۱) و (۲) تا آن‌جا که ممکن است، بپوشانیم. حداکثر چند قطعه می‌توان در



جدول قرار داد؟

- (۱) ۹
- (۲) ۱۰
- (۳) ۱۱
- (۴) ۱۲
- (۵) ۱۳

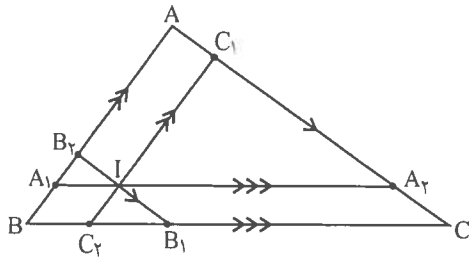
۲۸۶. چهار تیم در یک دوره مسابقه فوتبال شرکت کردند و هر دو تیم دقیقاً یک بار با هم مسابقه دادند. هر برد ۳ امتیاز، هر مساوی ۱ امتیاز و هر باخت ۰ امتیاز داشت.

خروجی امتیازها در جدول مقابل ۹, ۴, ۲, ۱ است. کدام گزینه نمی‌تواند خروجی یک جدول باشد؟

	تیم A	تیم B	تیم C	تیم D
تعداد برد	۳	۱	۰	۰
تعداد مساوی	۰	۱	۲	۱
تعداد باخت	۰	۱	۱	۲
امتیاز	۹	۴	۲	۱
خروجی	۹	۴	۲	۱

- (۱) ۶, ۶, ۴, ۱
- (۲) ۳, ۳, ۳, ۳
- (۳) ۵, ۳, ۳, ۲
- (۴) ۹, ۵, ۳, ۱
- (۵) ۵, ۵, ۵, ۰

۲۸۷. از نقطه دل خواه I درون مثلث ABC، سه خط موازی ضلع‌های مثلث ABC رسم می‌کنیم، محیط مثلث ABC برابر با ۲۰ است. محیط مثلث IB_1A_1 برابر با ۲ و محیط مثلث IC_1B_1 برابر ۳ است. محیط مثلث IA_1C_1 کدام است؟



- (۱) ۱۵
- (۲) ۱۴
- (۳) ۱۷
- (۴) ۱۸
- (۵) ۱۶

۲۸۸. X و y دو عدد طبیعی هستند و $\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 9$ ، بیش‌ترین مقدار xy چند است؟

- (۱) ۱۶
- (۲) ۴۹
- (۳) ۸۱
- (۴) ۱۰۰
- (۵) ۱۲۱

۲۸۹. حاصل ضرب دو عدد طبیعی n و m برابر ۲۱۴۸۷۵ و ترتیب رقم‌های m عکس ترتیب رقم‌های n است. رقم وسط این اعداد کدام است؟

- (۱) ۵
- (۲) ۶
- (۳) ۷
- (۴) ۸
- (۵) ۹

۲۹۰. جدولی 3×3 از حروف را «پالیندرومی» می‌گوییم هرگاه کلمات هر ردیف و هر ستونش از هر دو طرف (چپ به راست و برعکس) به یک شکل خوانده شوند. مانند جدول روبه‌رو:

چند جدول 3×3 پالیندرومی با استفاده از دو حرف X و Y می‌توان نوشت؟ (جدول می‌تواند فقط شامل یک حرف باشد).

A	B	A
C	B	C
A	B	A

- (۱) ۶
- (۲) ۸
- (۳) ۱۲
- (۴) ۱۶
- (۵) ۱۸

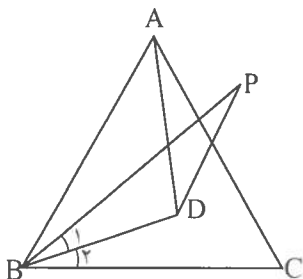
۲۹۱. هر حرف به جای یک رقم نشسته است و حرف‌های مختلف به جای رقم‌های مختلف است. حاصل $b + a + b + y$ کدام عدد نمی‌تواند باشد؟

$$\begin{array}{r} t \ o \ y \\ + \\ t \ o \ y \\ + \\ t \ o \ y \\ \hline b \ a \ b \ y \end{array}$$

- (۱) ۹
- (۲) ۱۲
- (۳) ۱۵
- (۴) ۱۸

(۵) هر چهار گزینه می‌تواند باشد.

۲۹۲. در شکل زیر، ABC مثلث متساوی‌الاضلاع است. نقطه‌های P و D را طوری در نظر می‌گیریم که $BP = BA$ ، $DB = DA$ و



$\hat{B}_1 = \hat{B}_p$ اندازه زاویه \hat{BPD} در چه محدوده‌ای قرار می‌گیرد؟

- (۱) $12^\circ < \hat{BPD} < 18^\circ$
- (۲) $19^\circ < \hat{BPD} < 25^\circ$
- (۳) $26^\circ < \hat{BPD} < 32^\circ$
- (۴) $33^\circ < \hat{BPD} < 39^\circ$
- (۵) $40^\circ < \hat{BPD} < 46^\circ$

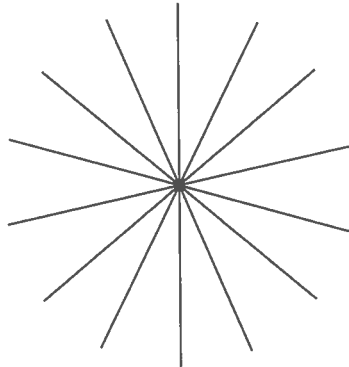
۲۹۳. عددهای ۵، ۴۵، ۴، -۲، -۱۵، -۱ را در جدول ضرب 3×3 چیده‌ایم و حاصل ضرب‌های به‌دست آمده را جمع کرده‌ایم.

×			

بیش‌ترین مقدار این حاصل جمع چقدر است؟

- (۱) ۱۴۰
 (۲) ۱۲۰
 (۳) ۱۶۲۵
 (۴) ۱۱۲۵
 (۵) ۱۵۰

۲۹۴. مرجان m خط که همگی از یک نقطه می‌گذرند را طوری رسم کرده است که زاویه بین هر دو خط متوالی‌اش برابر x درجه است (مانند شکل زیر). رکسانا نیز n خط مانند مرجان رسم کرده است که زاویه بین هر دو خط متوالی‌اش برابر y درجه است. اگر x و



y عددهای طبیعی و $x - y = 27^\circ$ باشد، کم‌ترین مقدار ممکن برای $m + n$ چند است؟

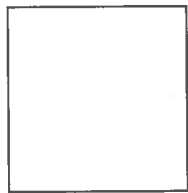
- (۱) ۶
 (۲) ۱۰
 (۳) ۱۴
 (۴) ۱۸
 (۵) ۲۵

۲۹۵. از بین علی، بابک و کامران دو نفر در آزمونی قبول شدند. از بین علی و بابک آن که قد کوتاه‌تر بود، در بین قبول شدگان مسن‌ترین بود. از بین بابک و کامران آن که جوان‌تر بود، در بین قبول شدگان قد کوتاه‌تر بود. از بین علی و کامران آن که قد بلندتر بود، در بین

قبول شدگان جوان‌تر بود. کدام گزینه دربارهٔ شخصی که در آزمون قبول نشده، درست است؟

- (۱) بابک قبول نشده و قد کوتاه‌ترین است.
 (۲) کامران قبول نشده و مسن‌ترین است.
 (۳) علی قبول نشده و قد بلندترین است.
 (۴) بابک قبول نشده و جوان‌ترین است.
 (۵) کامران قبول نشده و قد بلندترین است.

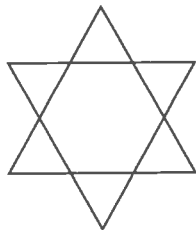
۲۹۶. در یک مربع، هر رأس را به وسط دو ضلع مقابلش وصل می‌کنیم. هشت ضلعی ایجاد شده در وسط شکل، چند خط تقارن دارد؟



- (۱) ۱
 (۲) ۲
 (۳) صفر
 (۴) ۴
 (۵) ۸

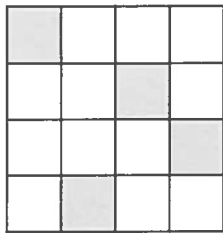
۲۹۷. دو مثلث متساوی‌الاضلاع هم‌نهشت طوری قرار گرفته‌اند که هر یک حاصل دوران مرکزی دیگری است. مساحت شش ضلعی منتظم

تشکیل شده، ۶۰ است. مساحت هر یک از مثلث‌ها چقدر است؟



- (۱) ۸۰
 (۲) ۹۰
 (۳) ۱۰۰
 (۴) ۱۱۰
 (۵) ۱۲۰

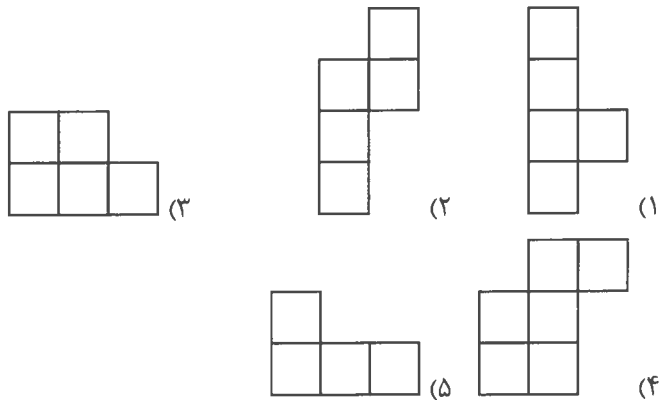
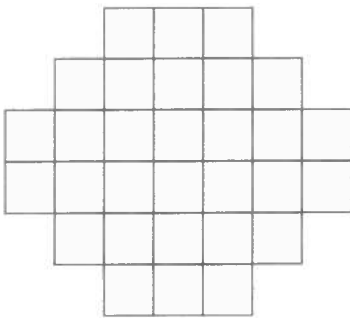
۲۹۸. در خانه‌های سفید صفحه شطرنجی زیر ۴ توپ قرار می‌دهیم طوری که در هر سطر و هر ستون دقیقاً یک توپ باشد. این کار به چند



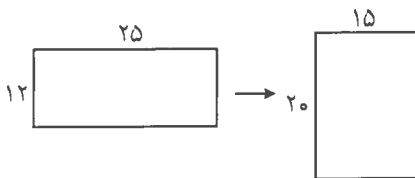
طریق امکان‌پذیر است؟

- (۱) ۷
(۲) ۸
(۳) ۹
(۴) ۱۰
(۵) ۱۱

۲۹۹. با کدام یک از گزینه‌ها می‌توان سطح شکل مقابل را به‌طور کامل پر کرد؟



۳۰۰. با حداقل چند برش مستقیم می‌توان مستطیل 25×12 را به مثلث‌هایی تبدیل کرد که با کمک این مثلث‌ها بتوان یک مستطیل



15×20 ساخت؟

- (۱) ۲
(۲) ۳
(۳) ۴
(۴) ۵
(۵) تعداد بیش‌تر از ۵ تا

۳۰۱. یک مستطیل 5×10 داریم که از مربع‌های 1×1 تشکیل شده است. قرار است تعدادی مربع انتخاب شود و یک قطر هر مربع رسم

شود. حداکثر چه تعداد مربع 1×1 را می‌توانیم انتخاب کنیم به طوری که قطرهای هر دو مربع متفاوت هیچ نقطه مشترکی نداشته

باشند؟ (برای مثال قطرهای دو مربع نقطه مشترک ندارند.)

- (۱) ۲
(۲) ۲۵
(۳) ۳۰
(۴) ۳۵
(۵) ۴۰

۳۰۲. یک بازی بسکتبال بین ساعت‌های ۳ و ۴ شروع و بین ساعت‌های ۶ و ۷ تمام شده است. جای عقربه‌های ساعت در ابتدا و انتهای

بازی با هم عوض شده است. این بازی تقریباً چند ساعت طول کشیده است؟

- (۱) ۲ ساعت و ۱۵ دقیقه
(۲) ۲ ساعت و ۳۰ دقیقه
(۳) ۲ ساعت و ۴۵ دقیقه
(۴) ۳ ساعت
(۵) ۳ ساعت و ۱۵ دقیقه

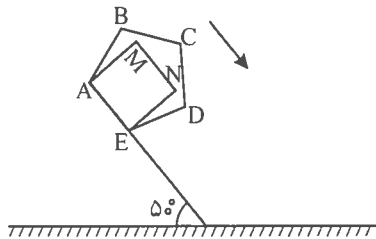
۳۰۳. عددهای ۱ تا ۶ را طوری دور یک دایره قرار داده‌ایم که اگر به‌صورت ساعتگرد (یا پادساعتگرد) هر ۵ عدد پشت سر هم را بررسی

کنیم، جمع سه عدد اول بزرگ‌تر از جمع ۲ عدد باقی‌مانده باشد. در این حالت مجموع عددهای دو طرف عدد ۱ می‌تواند کدام

گزینه باشد؟

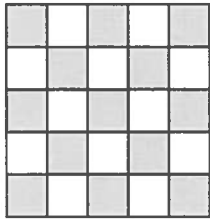
- (۱) ۵
(۲) ۶
(۳) ۷
(۴) ۹
(۵) ۱۰

۳۰۴. مربع AMNE را در ضلع AE به پنج ضلعی ABCDE متصل نموده‌ایم. پس از سه بار غلتیدن پنج ضلعی بر روی ضلع‌هایش به سمت پایین، ضلع NE با سطح زمین چه زاویه‌ای دارد؟



- (۱) 6° (۲) 5°
 (۳) 4° (۴) 3°
 (۵) 2°

۳۰۵. مهره‌ی اسبی را به صفحه‌ی شطرنجی 5×5 مقابل وارد می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که در اولین حرکت مهره پس از ورود، در خانه‌ی سیاه قرار گیرد؟ (حرکت اسب به صورت L می‌باشد.)



- (۱) 52% (۲) 60%
 (۳) 48% (۴) 32%
 (۵) 40%

۳۰۶. اگر x و y عددهای اول باشند و $x^2 + 3y = 312$ ، چند مقدار برای x داریم؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳ (۵) ۴

۳۰۷. عددی که خودش اول است و رقم‌هایش نیز اول هستند را عدد «خیلی اول» می‌نامیم. مجموع کوچک‌ترین عدد «خیلی اول» سه رقمی و بزرگ‌ترین عدد «خیلی اول» سه رقمی را A می‌نامیم. مجموع رقم‌های عدد A کدام است؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۲۱ (۳) ۲۲ (۴) ۲۳ (۵) ۲۴

۳۰۸. عددهای ۱ تا ۱۶ را در خانه‌های یک جدول 4×4 قرار می‌دهیم طوری که مجموع عدد واقع در سطرها و ستون‌ها و قطرها با هم برابر باشد مجموع دو عددی که در خانه‌های ستاره‌دار باید قرار دهیم کدام است؟

		۲	۱۳
۵	*	۱۱	
*	۶		۱۲
۴		۱۴	

- (۱) ۱۵ (۲) ۱۶ (۳) ۱۹ (۴) ۲۱ (۵) ۲۲

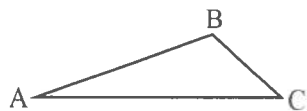
۳۰۹. رضا رقمی را انتخاب می‌کند و آن را به محسن می‌گوید. این رقم را X می‌نامیم. سپس این‌طور ادامه می‌دهد، «عدد سه رقمی که رقم دهگان آن ۳، رقم صدگان X و بر ۱۱ بخش پذیر است، چیست؟» محسن با خوشحالی می‌گوید: «من راه حل این مسئله را می‌دانم» اما پس از کمی محاسبه می‌گوید: «چنین عددی وجود ندارد!» X چند است؟ (عدد سه رقمی \overline{abc} بر ۱۱ بخش پذیر است، هرگاه $11 \mid (c + a - b)$ یا $c + a - b = 0$)

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶ (۵) ۷

۳۱۰. پونه دارای ۱۰ میله با طول‌های طبیعی و متفاوت است که با هیچ سه تای آن‌ها نمی‌تواند یک مثلث بسازد. کم‌ترین طول ممکن برای بلندترین میله چه قدر است؟

- (۱) ۳۴ (۲) ۵۵ (۳) ۸۹ (۴) ۱۴۴ (۵) ۲۳۳

۳۱۱. در مثلث ABC زیر، زاویه B باز و $BC < AB$ است. اگر نیم‌سازهای زاویه‌های خارجی A و B امتداد ضلع‌های BC و AC را به ترتیب در D و E قطع کنند و $AD = AB = BE$ ، زاویه BAC چند درجه است؟



- (۱) ۱۲°
 (۲) ۱۵°
 (۳) ۱۸°
 (۴) ۲۷°
 (۵) ۳۶°

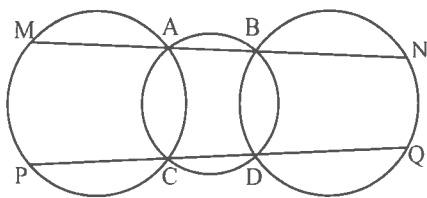
۳۱۲. یک بازی به این صورت است که ۱۰ تاس می‌ریزیم. هر چقدر مجموع عددهای رو شده بزرگ‌تر باشد، بهتر است. حمید ۱۰ تاس را می‌ریزد و این عددها رو می‌شود:



به حمید این شانس داده می‌شود که هر تعداد از تاس‌ها را که می‌خواهد به انتخاب خود، دوباره بریزد. حمید با انتخاب چند تاس و دوباره انداختن آن‌ها احتمال این که امتیاز بالاتری بیاورد را بیش‌تر می‌کند؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) ۷ (۵) ۹

۳۱۳. سه دایره داریم که مساوی نیستند. پاره‌خط‌های AB و CD را امتداد می‌دهیم تا دایره‌ها را در M، N، P، Q قطع کنند. در شکل چند دوزنقه داریم که رأس‌هایش حروف A، B، C، D، M، N، P، Q باشند؟



- (۱) صفر
 (۲) ۱
 (۳) ۲
 (۴) ۳
 (۵) ۴

۳۱۴. در یک سری از مسابقات بسکتبال تیم‌هایی که از مرحله اول به مرحله دوم صعود کردند دارای میانگین امتیاز ۷۲ بودند و بقیه تیم‌ها دارای میانگین امتیاز ۵۰ بوده‌اند. اگر میانگین امتیازات تمامی تیم‌ها در مرحله اول ۶۴ بوده باشد، چند درصد تیم‌ها صعود کرده‌اند؟

- (۱) حدود ۷۰٪ (۲) حدود ۵۰٪ (۳) حدود ۶۰٪ (۴) حدود ۶۴٪ (۵) حدود ۶۸٪

۳۱۵. در پنج‌ضلعی محدب ABCDE می‌دانیم:

$$\hat{A} = \hat{B} = ۱۲^\circ \text{ و } AE = AB = BC = ۲ \text{ و } CD = DE = ۴$$

مساحت این پنج‌ضلعی کدام است؟

- (۱) $۵\sqrt{۳}$ (۲) $\frac{۱۱\sqrt{۳}}{۲}$ (۳) $۶\sqrt{۳}$ (۴) $\frac{۱۳\sqrt{۳}}{۲}$ (۵) $۷\sqrt{۳}$

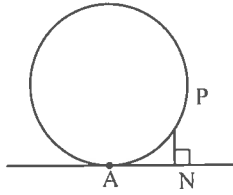
۳۱۶. شش تیرانداز در مسابقه تیراندازی شرکت کردند. هر تیرانداز ۵ شلیک انجام داد. هر تیر حتماً به یکی از هدف‌های ۱ تا ۱۰ امتیازی برخورد می‌کند. هر تیرانداز حداقل یک‌بار به هدف ۷ امتیازی شلیک کرده است. نتایج همه تیراندازی‌ها با هم متفاوت است و مجموع امتیازهای تیراندازها ۲۶۴ است. تیرانداز شماره ۳ (نفر سوم مسابقه) چه امتیازی آورده است؟

- (۱) ۴۱ (۲) ۴۲ (۳) ۴۳ (۴) ۴۴ (۵) ۴۵

۳۱۷. چندتا از قطرهای غیرمقاطع یک ۵۰ ضلعی را رسم کنیم تا به تعدادی پنج‌ضلعی تقسیم شود؟

- (۱) ۳۳ (۲) ۶۵ (۳) ۹۹ (۴) ۱۳۳ (۵) ۱۶۵

۳۱۸. خطی بر دایره‌ای در نقطه A مماس است. از نقطه P، روی دایره عمود PN بر خط رسم می‌کنیم. اگر $PN = 9$ و $AN = 15$ باشد، شعاع دایره برابر با کدام است؟

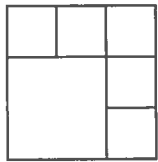


- (۱) ۱۷
- (۲) ۱۸
- (۳) ۲۰
- (۴) ۲۵
- (۵) ۲۸

۳۱۹. رأس‌های یک ۵ ضلعی را آبی کرده‌ایم. هم‌چنین ۵۳ نقطه آبی درون این چندضلعی وجود دارند. می‌دانیم هیچ سه نقطه آبی بر یک خط قرار ندارند. هم‌چنین ۵ ضلعی به مثلث‌هایی تقسیم شده است که هیچ سطح مشترکی ندارند و رأس‌های آن‌ها ۱۰۳ نقطه آبی رنگ هستند. به این ترتیب چند مثلث ایجاد شده است؟

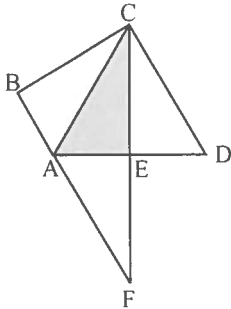
- (۱) ۱۵۰
- (۲) ۱۵۲
- (۳) ۱۵۴
- (۴) ۱۵۶
- (۵) ۱۵۸

۳۲۰. به چند طریق می‌توان عددهای ۵، ۴، ۳، ۲، ۱ و ۶ را در مربع‌های این شکل نوشت به طوری که اختلاف عددهای هیچ دو همسایه‌ای برابر ۳ نشود؟ (دو مربع را همسایه گوییم، هرگاه در ضلعی یا قسمتی از ضلعی مشترک باشند).



- (۱) ۴۸
- (۲) ۶۴
- (۳) ۸۸
- (۴) ۹۶
- (۵) ۲۱۶

۳۲۱. شش ضلعی ABCDEF از تقارن مثلث ACE نسبت به هر یک از ضلع‌هایش ساخته شده است. اگر این عمل را برای یک چهار ضلعی انجام دهیم، کم‌ترین تعداد ضلع‌هایش شکل حاصل چه قدر است؟



- (۱) ۴
- (۲) ۵
- (۳) ۶
- (۴) ۷
- (۵) ۸

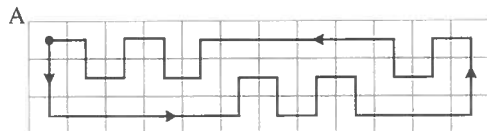
۳۲۲. درباره سه عدد طبیعی a، b و c می‌دانیم:

$$a + b + c = 59 \quad (a, b) \neq 1 \quad (a, c) \neq 1 \quad (b, c) \neq 1$$

حاصل abc چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) ۳
- (۴) ۴
- (۵) ۵

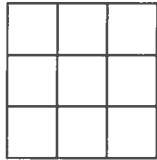
۳۲۳. در شکل زیر می‌خواهیم مسیری از خانه A رسم کنیم که از تمام خانه‌ها دقیقاً یک بار بگذرد و در آخر به خانه A برگردد و حرکت‌ها فقط افقی یا عمودی باشد (یک مثال را می‌بینید). چند مسیر این شکلی وجود دارد؟



- (۱) ۲۴
- (۲) ۱۲۰
- (۳) ۶۴
- (۴) ۴۸
- (۵) ۳۶

۳۲۴. عدد طبیعی n را «اصیل» گوییم هرگاه یکی از عوامل اولش از \sqrt{n} بزرگتر باشد. برای مثال $۲ \times ۵ \times ۳ = ۶۰$ و $۲ \times ۱۱ \times ۳ = ۶۶$ اصیل هستند اما $۲ \times ۱۳ = ۲۶$ اصیل نیست. چند عدد اصیل وجود دارد که تمامی عوامل اول هر یک از آن‌ها از ۳ کوچکتر هستند؟

- (۱) ۱۱۶ (۲) ۱۱۷ (۳) ۱۱۸ (۴) ۱۱۹ (۵) ۱۲۰



۳۲۵. به چند طریق می‌توان عددهای ۱ تا ۹ را در جدول زیر قرار داد به طوری که هر دو عدد متوالی در دو خانه مجاور باشند؟ (دو خانه که ضلع مشترک داشته باشند را مجاور می‌نامیم)

- (۱) ۳۲ (۲) ۳۶ (۳) ۴۰ (۴) ۴۴ (۵) ۴۸

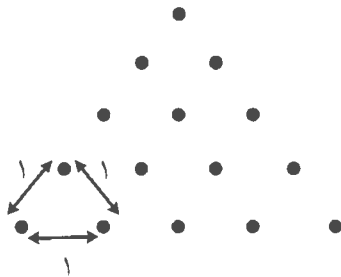
۳۲۶. بین اعداد ۱ تا ۳۰۰ چند عدد طبیعی وجود دارد که مکعب عددی طبیعی یا مجموع چند عدد طبیعی مکعب کامل متمایز باشد؟

- (۱) ۴۴ (۲) ۴۶ (۳) ۵۸ (۴) ۶۰ (۵) ۶۳

۳۲۷. بر روی وجه‌های تعدادی مکعب اعداد یک رقمی را نوشته‌ایم (به طوری که با چرخش مکعب، عدد ۷ به عدد ۸ تبدیل نشود). حداقل چند مکعب لازم است تا با کنار هم قرار دادن آن‌ها همه اعداد سه‌رقمی ساخته شوند؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۸ (۴) ۹ (۵) ۱۰

۳۲۸. فاصله همه نقطه‌های مجاور در شکل زیر برابر یک واحد است. همه مثلث‌هایی را که رأس‌های آن‌ها روی نقاط مشخص شده قرار دارند و مساحت آن‌ها برابر $\sqrt{3}$ است، می‌شماریم. عدد به دست آمده را به کدام صورت می‌توانیم بنویسیم؟ (k عددی طبیعی است.)



(است.)

(۱) $6k$

(۲) $6k + 3$

(۳) $6k + 5$

(۴) $3k + 2$

(۵) $3k + 1$

۳۲۹. پونه و پرند در حال انجام یک بازی جالب با سکه هستند، اگر سکه رو بیاید پرند دو امتیاز و اگر پشت بیاید پونه یک امتیاز می‌گیرد. چقدر احتمال دارد که در ۶ پرتاب، با محاسبه امتیازات، پرند برنده شده باشد؟

- (۱) $\frac{11}{32}$ (۲) $\frac{21}{32}$ (۳) $\frac{57}{64}$ (۴) $\frac{1}{2}$ (۵) $\frac{21}{64}$

۳۳۰. در مثلث ABC ، نقطه D بر ضلع AC طوری است که $AB = AD$ و $\angle ABC - \angle ACB = 30^\circ$ اندازه $\angle CBD$ چند درجه است؟

- (۱) 10° (۲) 15° (۳) 20° (۴) 25° (۵) 30°

۳۳۱. ۱۰ عدد طبیعی متمایز داریم که مجموع آن‌ها بر هر یک از ده عدد بخش‌پذیر است. حداقل مجموع این ده عدد در کدام محدوده است؟

- (۱) کوچکتر از ۱۰۰۰۰ (۲) بین ۱۰۰۰۰ و ۵۰۰۰۰ (۳) بین ۵۰۰۰۰ و ۱۰۰۰۰۰ (۴) بین ۱۰۰۰۰۰ و ۱۰۰۰۰۰۰ (۵) چنین عددی وجود ندارد.

۳۳۲. k بزرگترین عدد طبیعی است که هر رقم آن (به جز اولین و آخرین رقم) از میانگین دو رقم مجاورش کوچکتر است. مجموع رقم‌های k کدام است؟

- ۴۴ (۱) ۳۶ (۲) ۴۸ (۳) ۵۰ (۴) ۴۰ (۵)

۳۳۳. بزرگترین عدد طبیعی n که به ازای آن $(n!)!$ بر $(n!)!$ بخش پذیر است، کدام است؟ (توجه: $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$)

- ۶ (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۵۰ (۵)

۳۳۴. دایره‌های محیطی و محاطی یک دوازده ضلعی منتظم به طول ضلع a و یک پانزده ضلعی منتظم به طول ضلع b را رسم نموده‌ایم. اگر بدانیم مساحت حلقه محصور بین دو دایره، در هر دو شکل، مساحتی یکسان دارند، آن گاه:

$a = \frac{\sqrt{5}}{2}b$ (۱) $a = \frac{4}{5}b$ (۲) $a = b$ (۳) $a = \frac{5}{4}b$ (۴) $a = \frac{2}{\sqrt{5}}b$ (۵)

۳۳۵. اعداد ۲ تا ۱۴ را در ۸ خانه زیر طوری قرار می‌دهیم که:

حاصل ضرب اعداد سطر ۱ = حاصل ضرب اعداد سطر ۳ = حاصل ضرب اعداد ستون ۱ = حاصل ضرب اعداد ستون ۳

	۱ ↓		۳ ↓
۱ →	A	B	C
	D		E
۳ →	F	G	H

این کار به چند روش امکان پذیر است؟

- ۱۸ (۱)
۲۴ (۲)
۳۶ (۳)
۴۸ (۴)
۵۴ (۵)

۳۳۶. در تمام خانه‌های یک صفحه شطرنج 8×8 مهره‌های یکسانی قرار داده‌ایم. دو مهره همدیگر را تهدید می‌کنند، اگر در یک ردیف یا یک ستون باشند و مهره دیگری بین آن‌ها نباشد. در هر حرکت می‌توان یک مهره را که تعداد فردی مهره موجود بر صفحه را تهدید می‌کند، خارج نماییم. حداکثر تعداد مهره‌هایی که می‌توان خارج نمود، چه تعداد است؟

- ۵۲ (۱) ۵۴ (۲) ۵۷ (۳) ۵۹ (۴) ۶۰ (۵)

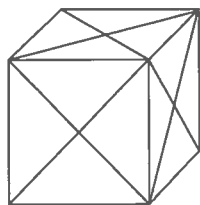
۳۳۷. ۷ نفر به نام‌های A، B، C، D، E، F و G در دو اتاق یک هتل ساکن هستند، می‌دانیم:

- ۳ نفر در اتاق ۱ و ۴ نفر در اتاق ۲ هستند.
- اگر G در اتاق ۱ باشد، D در اتاق ۲ نیست.
- اگر D در اتاق ۲ نباشد، G در اتاق ۱ است.
- اگر A در اتاق ۲ باشد، B در اتاق ۲ نیست.
- اگر B در اتاق ۱ باشد، A در اتاق ۱ نیست.

در این صورت B با چه کسی در اتاق ۱ باشد تا اتاق بقیه افراد به‌طور قطع مشخص شود؟

- A (۱) C (۲) D (۳) E (۴) F (۵)

۳۳۸. شکل مقابل یک مکعب به طول یال یک واحد را نشان می‌دهد که قطرهای همه وجه‌های آن رسم شده است و بدین ترتیب شبکه‌ای شامل ۱۴ رأس ایجاد گردیده است. (۸ تا رأس اصلی مکعب به‌علاوه ۶ نقطه برخورد قطرهای، طول کوتاه‌ترین مسیری از یال‌ها و قطرهای رسم شده که از همه این ۱۴ رأس عبور می‌کند، کدام است؟)



$\frac{11\sqrt{2}}{2} + 2$ (۳)

$6\sqrt{2} + 1$ (۲)

$\frac{13\sqrt{2}}{2}$ (۱)

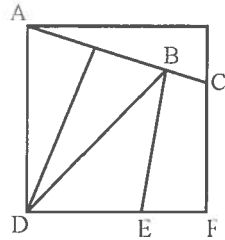
$\frac{10\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{2}$ (۵)

$7\sqrt{2}$ (۴)

۳۳۹. M و N دو عدد طبیعی هستند و $N = M^6$ و رقم‌های N عبارتند از ۰، ۲، ۳، ۴، ۴، ۷، ۸، ۸، ۹ باقی‌مانده M بر ۵ برابر کدام عدد است؟

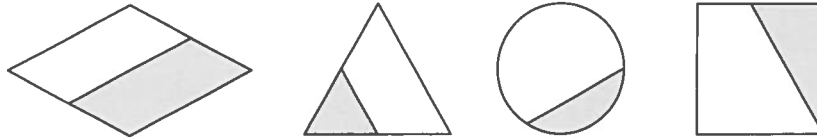
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴ (۵) صفر

۳۴۰. با رسم چهار پاره خط، مربع زیر را به پنج شکل هم‌مساحت تقسیم کرده‌ایم (چهار مثلث و یک چهارضلعی) نسبت طول پاره خط DE به طول پاره خط EF کدام است؟



- (۱) $\frac{7}{5}$ (۲) $\frac{4}{3}$
 (۳) $\frac{11}{8}$ (۴) $\frac{5}{4}$
 (۵) $\frac{10}{7}$

۳۴۱. چند تا از شکل‌های زیر محور تقارن دارند؟



- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴ (۵) صفر

۳۴۲. ۵ شهر داریم. حداقل چند جاده باید بین آن‌ها بسازیم تا بتوان از هر شهری به شهر دیگر رفت؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷ (۵) ۱۰

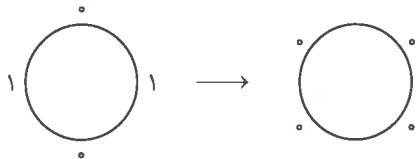
۳۴۳. در جدول زیر هر عدد برابر با مجموع دو عدد سمت چپ آن است.

*					۱۸	۴۷
---	--	--	--	--	----	----

کدام عدد در خانه * قرار می‌گیرد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴ (۵) ۵

۳۴۴. در هر مرحله اعداد روی دایره‌ها پاک می‌شوند و حاصل ضرب هر دو عدد بین آن‌ها نوشته می‌شود، برای مثال:

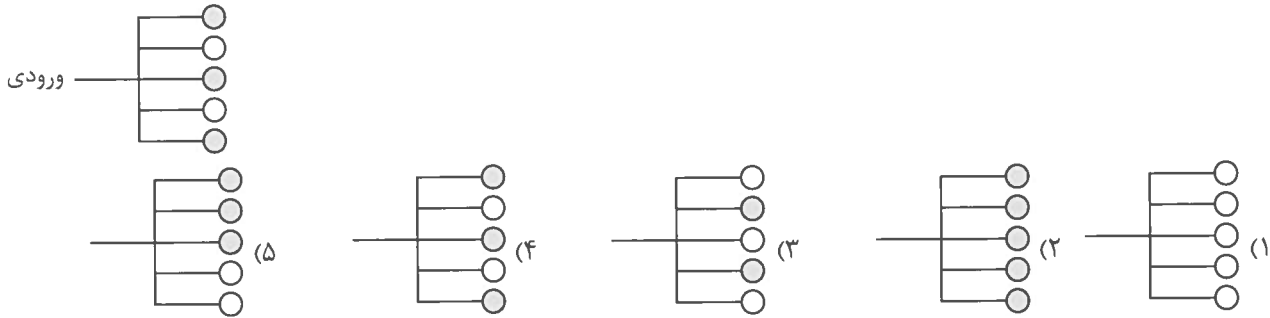


بعد از چند مرحله همهٔ عددهای دایرهٔ زیر صفر می‌شوند؟

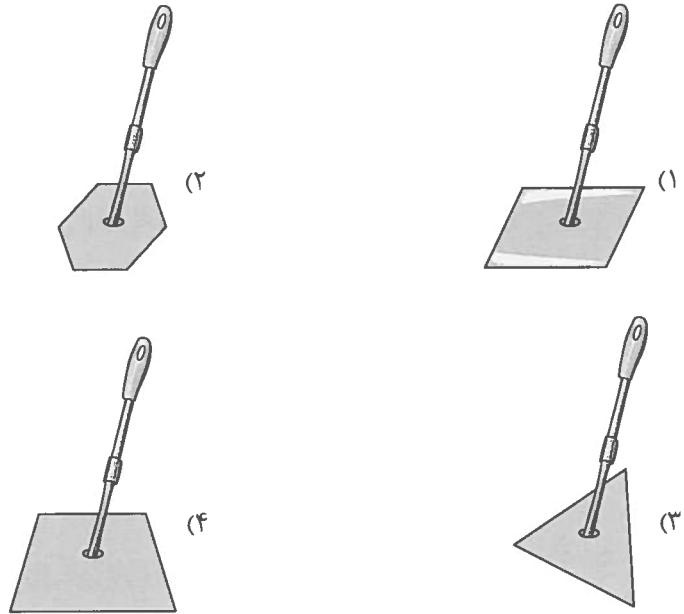


- (۱) ۱ (۲) ۲
 (۳) ۳ (۴) ۴
 (۵) ۵

۳۴۵. دستورالعمل A همه لامپ‌ها را خاموش می‌کند. دستورالعمل B همه لامپ‌ها را روشن می‌کند. دستورالعمل C همه لامپ‌های روشن را خاموش و همه لامپ‌های خاموش را روشن می‌کند. دستورالعمل D همه لامپ‌های روشن را خاموش می‌کند. (لامپ روشن را با \bigcirc و لامپ خاموش را با \bigcirc نمایش می‌دهیم.) اگر دستورالعمل CCDCAD را از چپ به راست و به ترتیب به ورودی بدهیم، در خروجی نمایش لامپ‌ها به کدام صورت خواهد بود؟

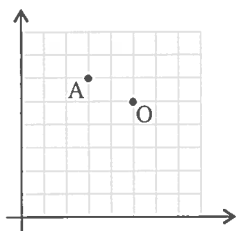


۳۴۶. با کدام یک از تی‌های زیر نمی‌توان کف یک اتاق مستطیل شکل را به طور کامل تمیز کرد؟ (سطح مقطع این تی‌ها به ترتیب مربع، شش ضلعی منتظم، مثلث متساوی‌الاضلاع و دوزنقه متساوی‌الساقین است.)



(۵) با تمام این تی‌ها می‌توان کف اتاق را به طور کامل تمیز کرد.

۳۴۷. دایره‌ای به مرکز $O = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$ رسم کرده‌ایم که از نقطه $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$ می‌گذرد. این دایره از کدام نقطه زیر نمی‌گذرد؟



$$\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (۲)$$

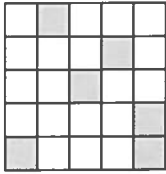
$$\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (۴)$$

$$\begin{bmatrix} 7 \\ 6 \end{bmatrix} \quad (۱)$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (۳)$$

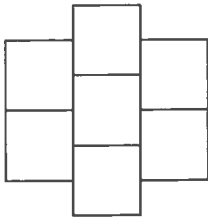
$$\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (۵)$$

۳۴۸. حداقل چند خانه از جدول زیر را رنگ کنیم تا شکل دارای محور تقارن باشد؟



- ۱ (۱)
- ۲ (۲)
- ۳ (۳)
- ۴ (۴)
- ۵ (۵)

۳۴۹. به چند حالت می توان ۲ خانه از خانه های شکل زیر را رنگ کرد، به طوری که خانه های رنگ شده مجاور نباشند؟



- ۵ (۱)
- ۶ (۲)
- ۷ (۳)
- ۸ (۴)
- ۹ (۵)

۳۵۰. اگر در رابطه $A \times (B \times C - 1) = 128$ هر سه عدد A ، B و C اول باشند، حاصل $A + B + C$ چیست؟

- ۲۱ (۵)
- ۲۰ (۴)
- ۱۹ (۳)
- ۱۸ (۲)
- ۱۷ (۱)

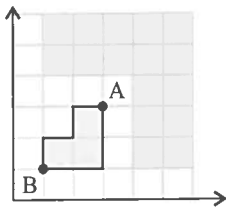
۳۵۱. نماد \oplus را به این صورت تعریف می کنیم:

$$1 \oplus 1 = 0 \quad 1 \oplus 0 = 1 \quad 0 \oplus 0 = 0 \quad 0 \oplus 1 = 1$$

اگر اعداد A و B بتوانند ۰ یا ۱ باشند، حاصل عبارت $B \oplus (A \oplus (B \oplus A))$ همواره برابر کدام است؟

- ۰ (۱)
- ۱ (۲)
- A (۳)
- B (۴)
- هیچ کدام (۵)

۳۵۲. در شکل زیر نقطه A در مختصات $\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ به صفحه پونز شده است. اگر در هر مرحله شکل را حول پونز و به اندازه 90° در جهت حرکت عقربه های ساعت بچرخانیم، پس از ۱۰ مرحله مختصات B کدام است؟

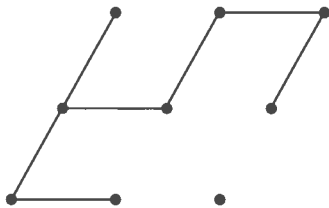


- $\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ (۱)
- $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ (۲)
- $\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ (۳)
- $\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ (۴)
- $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ (۵)

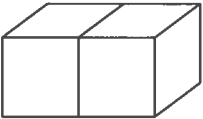
۳۵۳. اعداد ۱ تا ۶ را روی وجه های یک مکعب نوشته ایم. اگر ۱ روی وجه کنار ۲، ۴ و ۶ باشد، کدام عبارت همواره درست است؟

- ۲ روی وجه مقابل ۶ است. (۱)
- ۱ روی وجه مقابل ۳ است. (۲)
- ۳ و ۵ روی وجه های کنار هم هستند. (۳)
- ۴ روی وجه مقابل ۳ است. (۴)
- ۴ روی وجه مقابل ۳ هستند. (۵)

۳۵۴. آدرینا و مهبد در حال نقطه‌بازی «مثلثی» هستند. قانون این بازی به این شکل است که اگر کسی در نوبت خود با رسم یک پاره‌خط مثلثی ایجاد کند، نوبت به نفر بعدی نمی‌رسد. در غیر این صورت نوبت نفر بعدی است که پاره‌خطی رسم کند. (از هر نقطه فقط می‌توان به نزدیک‌ترین نقاط مجاور آن پاره‌خط رسم کرد.) در انتها تعداد مثلث‌ها را می‌شمارند و هر کدام به تعداد مثلث‌هایی که ایجاد کرده امتیاز می‌گیرد. در شکل زیر اگر نوبت آدرینا باشد و هر کدام بهترین بازی ممکن را انجام دهند، نتیجه بازی در انتها به چه صورت خواهد بود؟



- (۱) آدرینا ۸، مهبد ۰
- (۲) مهبد ۷، آدرینا ۱
- (۳) آدرینا ۶، مهبد ۲
- (۴) مهبد ۵، آدرینا ۳
- (۵) آدرینا ۴، مهبد ۴

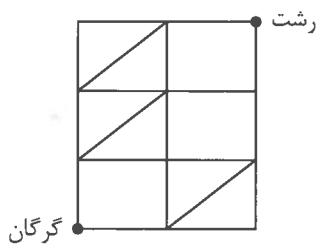
۳۵۵. با چسباندن وجه‌های مربع شکل دو هرم به دو تا از وجه‌های حجم  چند حجم مختلف می‌توان ساخت؟ (حجم‌هایی که با چرخاندن به یک‌دیگر تبدیل می‌شوند، یکی حساب می‌شوند.)

- (۱) ۲
- (۲) ۴
- (۳) ۶
- (۴) ۸
- (۵) ۱۰

۳۵۶. در یک جدول 3×3 ، تعداد خانه‌هایی که با حذف آن‌ها بتوان بقیه جدول را با کاشی‌های 1×2 پوشاند، چند تا است؟

- (۱) ۱
- (۲) ۴
- (۳) ۵
- (۴) ۷
- (۵) ۹

۳۵۷. در نقشه‌ای که می‌بینید، طول جاده‌های افقی ۴ کیلومتر، جاده‌های عمودی ۳ کیلومتر و جاده‌های اریب ۵ کیلومتر است. طول کوتاه‌ترین مسیر ممکن از گرگان به رشت چند کیلومتر است؟



- (۱) ۱۱
- (۲) ۱۳
- (۳) ۱۴
- (۴) ۱۵
- (۵) ۱۷

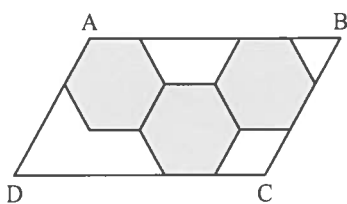
۳۵۸. دهگان کوچک‌ترین عدد طبیعی که دقیقاً $\frac{1}{5}$ اعداد طبیعی قبل از آن مربع کامل هستند، کدام است؟

- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) ۳
- (۴) ۴
- (۵) ۵

۳۵۹. حامد و هانی در یک مسابقه دو شرکت کردند. حامد نصف مسافت را با سرعت a دوید و نصف دیگر را با سرعت b راه رفت. هانی نصف زمان را با سرعت a دوید و نصف دیگر را با سرعت b راه رفت. چه کسی زودتر به خط پایان رسیده است؟

- (۱) حامد
- (۲) هانی
- (۳) هر دو با هم به خط پایان رسیده‌اند.
- (۴) به مقدار $\frac{a}{b}$ بستگی دارد.
- (۵) به مسافت بستگی دارد.

۳۶۰. از امتداد اضلاع سه تا شش ضلعی منتظم و برابر، متوازی الاضلاع ABCD به دست آمده است. مقدار $\frac{AB}{AD}$ برابر با کدام گزینه است؟



- (۲) $\frac{5}{3}$
(۴) $\frac{4}{3}$

- (۱) $\frac{3}{2}$
(۳) $\frac{8}{5}$
(۵) $\frac{6}{5}$

۳۶۱. در انجام الگوریتم غربال اراتستن روی اعداد ۱ تا n ، می‌دانیم بعد از خط خوردن ۱۲۱ فقط یک عدد دیگر خط می‌خورد. حداقل مقدار n کدام است؟

(۵) ۱۶۹

(۴) ۱۴۳

(۳) ۱۳۳

(۲) ۱۳۲

(۱) ۱۲۲

۳۶۲. A و B عددهایی هستند که با رقم‌های ۱ و ۲ ساخته شده‌اند. \overline{AB} عددی است که از کنار هم قرار دادن رقم‌های A و B به وجود می‌آید. برای مثال اگر $A = ۲۱$ و $B = ۲۲$ باشد، آن‌گاه $\overline{AB} = ۲۱۲۲$ و $\overline{BA} = ۲۲۲۱$. اگر $A = ۱۱۱۲۱۲۲۱$ باشد، کوچک‌ترین عددی مانند B که $\overline{AB} = \overline{BA}$ چند رقم دارد؟

(۵) چنین عددی وجود ندارد.

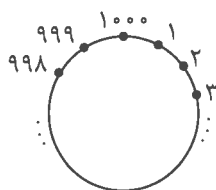
(۴) ۸

(۳) ۶

(۲) ۳

(۱) ۲

۳۶۳. در شکل زیر خرگوشی روی خانه ۱ قرار دارد که می‌تواند با هر پرش ۸ خانه ساعتگرد یا ۵ خانه پادساعتگرد جابه‌جا شود. چند تا از این خانه‌ها به هیچ صورتی توسط این خرگوش قابل دسترسی نیستند؟



(۲) ۷۰۰

(۱) ۶۲۵

(۴) ۸۷۵

(۳) ۸۰۰

(۵) هیچ‌کدام

۳۶۴. ۱۰ عدد طبیعی متمایز داریم که ب.م.م هر دو تایی از آن‌ها برابر ۱۰ است. حداقل مجموع این ۱۰ عدد کدام است؟

(۵) ۱۱۵۰

(۴) ۱۰۱۰

(۳) ۷۲۰

(۲) ۶۶۰

(۱) ۵۵۰

۳۶۵. با ۲۷ مکعب واحد یک مکعب به ضلع ۳ می‌سازیم. سپس سطح بیرونی آن را رنگ می‌کنیم و دوباره مکعب بزرگ را به ۲۷ مکعب کوچک تقسیم می‌کنیم. حداقل چند بار دیگر باید این کار را انجام دهیم تا هر ۶ وجه هر ۲۷ مکعب کوچک رنگ شود؟

(۵) ۵

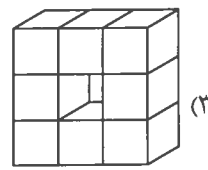
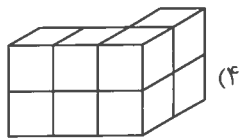
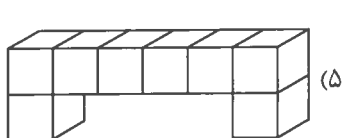
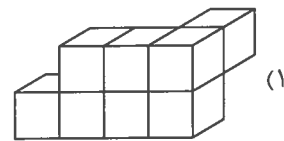
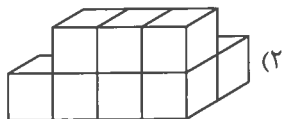
(۴) ۴

(۳) ۳

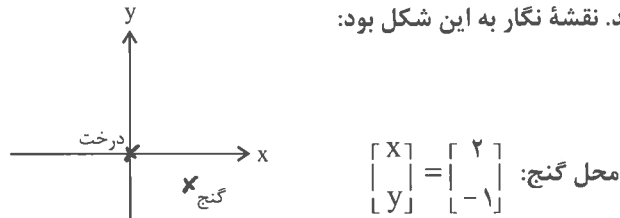
(۲) ۲

(۱) ۱

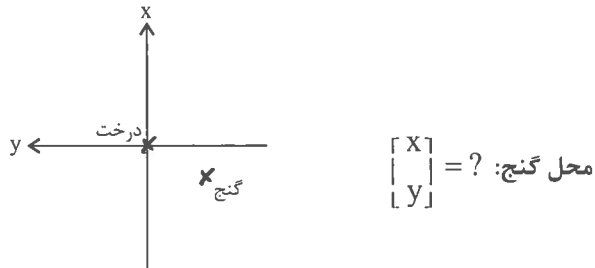
۳۶۶. با به هم چسباندن چهار تا مکعب مستطیل به شکل  کدام حجم را نمی‌توان ساخت؟



۳۶۷. نگار و کیانا قلک‌های خود را در یک چاله مشترک چال کردند و سعی کردند فاصله عمودی و افقی محل چاله با درخت نزدیک آن را با قدم‌هایشان بشمرند. سپس هر کس نقشه گنجی برای خود کشید. نقشه نگار به این شکل بود:



اگر نقشه کیانا به این شکل باشد:



محل گنج در نقشه او کجاست؟

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (5) \quad \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (4) \quad \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (3) \quad \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (2) \quad \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

۳۶۸. m و n اعدادی صحیح هستند. اگر عدد m ، ۶ برابر عدد n باشد، حاصل $m + n$ کدام عدد نمی‌تواند باشد؟

- ۳۲ (۱) ۴۹ (۲) ۷۰ (۳) ۸۴ (۴) ۹۱ (۵)

۳۶۹. در شکل مقابل چند مثلث متساوی‌الساقین با زاویه‌های تند می‌توان پیدا کرد که رئوس آن‌ها نقطه‌های موجود در شکل باشد؟

- • • ۴ (۱)
 • • • ۶ (۲)
 • • • ۸ (۳)
 • • • ۱۰ (۴)
 • • • ۱۲ (۵)

۳۷۰. وزن هر عدد را به این صورت تعریف می‌کنیم که از سمت راست شروع می‌کنیم و شماره جایگاه رقم را در خود رقم ضرب می‌کنیم و در نهایت این اعداد را باهم جمع می‌کنیم. برای مثال وزن عدد ۱۲۷ به صورت زیر به دست می‌آید:



$$\rightarrow 1 \times 7 + 2 \times 2 + 3 \times 1 = 14$$

مجموع وزن عددهای دو رقمی چند است؟

- ۱۳۰۵ (۱) ۱۳۹۶ (۲) ۴۵۰ (۳) ۶۳۰ (۴) ۲۰۲۵ (۵)

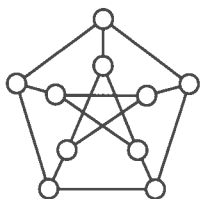
۳۷۱. هر کدام از حروف A, B, C, D, E و F یکی از مقادیرهای ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ و ۶ را دارند و مقدار هیچ دو حرفی باهم برابر نیست. اگر بدانیم:

$$\begin{aligned} A + 2 &< F \\ 2 \times B &= C + 6 \\ C + 1 &= A \\ D &< E \end{aligned}$$

مقدار $F + E$ کدام است؟

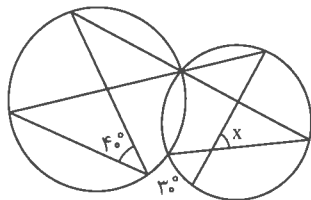
- ۹ (۲) ۱۱ (۱) ۸ (۳) ۷ (۴) ۵ (۵)

۳۷۲. به چند طریق می توان دایره های شکل زیر را با سیاه و سفید رنگ کرد به طوری که دایره هایی که به هم وصل اند، هم رنگ نباشند؟



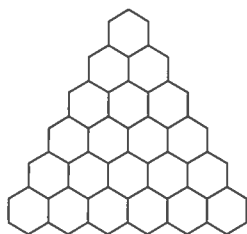
- ۱ (۱)
- ۲ (۲)
- ۳ (۳)
- ۴ (۴)
- ۵ (۵) صفر

۳۷۳. اندازه \hat{X} چند درجه است؟



- ۱ (۱) 30°
- ۲ (۲) 40°
- ۳ (۳) 50°
- ۴ (۴) 55°
- ۵ (۵) 60°

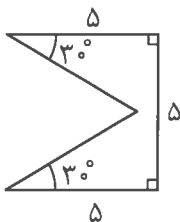
۳۷۴. در شبکه زیر هر سه خانه مجاور فقط به صورت  یا دوران های آن رنگ آمیزی می شود. این شبکه را به چند روش متفاوت



می توان رنگ آمیزی کرد؟

- ۱ (۱)
- ۲ (۲)
- ۳ (۳)
- ۴ (۴)
- ۵ (۵)

۳۷۵. محیط شکل مقابل کدام است؟

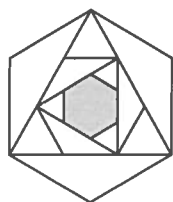


- ۱ (۱) ۲۱
- ۲ (۲) ۲۳
- ۳ (۳) ۲۴
- ۴ (۴) ۲۵
- ۵ (۵) ۲۷

۳۷۶. چند عدد پنج رقمی داریم که رقم سمت چپ آن ها ۵ باشد و هر دو رقم مجاور متوالی باشند؟ (مثل ۵۴۳۲۳ یا ۵۶۷۶۵)

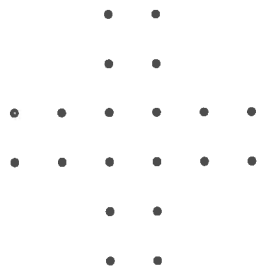
- ۱ (۱) ۱۶
- ۲ (۲) ۱۲۰
- ۳ (۳) ۶۴
- ۴ (۴) ۱۰۰۰
- ۵ (۵) ۲۴

۳۷۷. در شکل زیر، نسبت مساحت شش ضلعی تیره به شش ضلعی بزرگ که هر دو منتظم هستند، کدام است؟



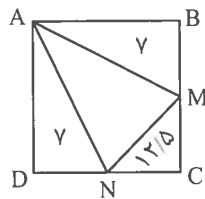
- ۱ (۱) $\frac{1}{6}$
- ۲ (۲) $\frac{1}{8}$
- ۳ (۳) $\frac{1}{9}$
- ۴ (۴) $\frac{1}{12}$
- ۵ (۵) $\frac{1}{18}$

۳۷۸. حداقل چند نقطه از ۲۰ نقطه شکل مقابل را باید حذف کنیم تا هیچ چهار نقطه‌ای تشکیل رئوس یک مربع را ندهند؟ (مربع می‌تواند به شکل مورب باشد).



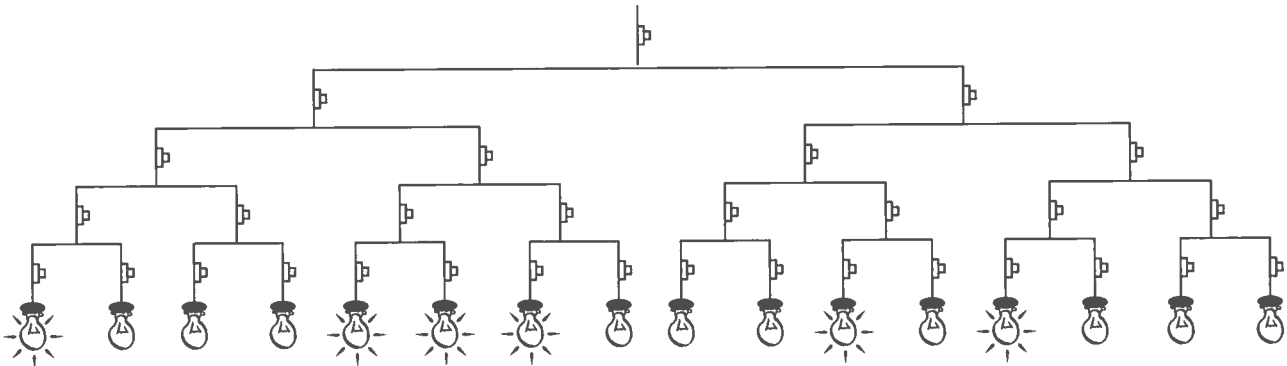
- (۱) ۴
- (۲) ۵
- (۳) ۶
- (۴) ۷
- (۵) ۸

۳۷۹. چهارضلعی ABCD مربع است. مساحت مثلث‌های ABM و ADN برابر با ۷ است و مساحت مثلث MNC برابر با ۱۲/۵ است. مساحت مثلث AMN کدام است؟



- (۱) ۱۴
- (۲) ۱۹/۵
- (۳) ۲۲/۵
- (۴) ۴۹
- (۵) ۵۴/۵

۳۸۰. در شکل زیر هر کلید، تمام لامپ‌های پایین خودش را تغییر وضعیت می‌دهد (هر کدام که خاموش است را روشن و هر کدام که روشن است را خاموش می‌کند). حداقل چند بار باید از کلیدها استفاده کرد تا دقیقاً نیمی از لامپ‌ها روشن و نیمی خاموش باشند؟



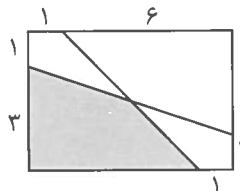
- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) ۳
- (۴) ۴
- (۵) ۵

۳۸۱. اعداد ۱ تا ۴۰ را در مربع‌های جدول زیر طوری قرار داده‌ایم که هر دو عدد متوالی در دو مربع مجاور باشند. مجموع اعداد چهارگوشه جدول کدام است؟

	۱۹				
۳۵			۴۰		
	۳۱				

- (۱) ۴۰
- (۲) ۳۹
- (۳) ۴۸
- (۴) ۵۷
- (۵) ۶۶

۳۸۲. مساحت ناحیه تیره در مستطیل مقابل کدام است؟



- (۱) ۱۰/۵
- (۲) ۱۱/۲۵
- (۳) ۱۲
- (۴) ۱۲/۵
- (۵) ۱۳/۷۵

۳۸۳. می‌خواهیم یک سیب و یک پرتقال را بین سه نفر طوری تقسیم کنیم که همگی میوه داشته باشند. برای این کار در صورت نیاز

می‌توان هر میوه را به دو بخش مساوی تقسیم کرد. به چند روش می‌توان میوه‌ها را بین افراد تقسیم کرد؟

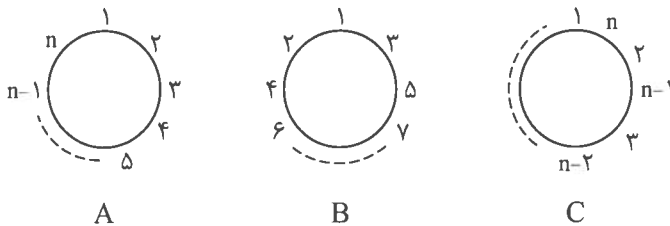
- ۸ (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۱۴ (۵)

۳۸۴. در دوزنقه متساوی‌الساقین به طول قاعده‌های ۸ و ۱۸ دایره‌ای محاط کرده‌ایم. شعاع دایره کدام است؟

- ۵ (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۱ (۴) ۱۲ (۵)

۳۸۵. اعداد ۱ تا n را با ترتیبی دلخواه با رنگ آبی دور یک دایره می‌نویسیم. سپس اختلاف هر دو عدد مجاور را با رنگ قرمز بین آن دو

عدد می‌نویسیم. کدام رابطه بین مجموع اعداد قرمز در سه آرایش زیر برقرار است؟ ($n > 10$)



- $A > B = C$ (۱)
 $A = B < C$ (۲)
 $C < B = A$ (۳)
 $A < C = B$ (۴)
 $A - B = C$ (۵)

۳۸۶. عدد $17 \times 25 - 20000$ حاصل ضرب ۳ عدد فرد متوالی است که یکی از آن سه عدد اول است. آن عدد اول کدام است؟

- ۲۳ (۱) ۲۹ (۲) ۱۹ (۳) ۳۱ (۴) ۱۷ (۵)

۳۸۷. یک مکعب $3 \times 3 \times 3$ از ۲۷ مکعب به طول یال یک تشکیل شده است. هر دو مکعب کوچک که فقط یک رأس مشترک داشته

باشند را جفت «لایق» می‌نامیم. چند جفت لایق در این مکعب وجود دارد؟

- ۱۶ (۱) ۲۴ (۲) ۳۲ (۳) ۴۸ (۴) ۷۲ (۵)

۳۸۸. سه عدد a ، b و c بزرگ‌تر از یک هستند. می‌دانیم:

$$a \times b \times c = 900$$

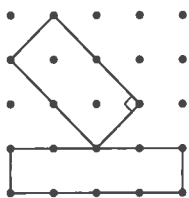
$$(a, b) = 1 \quad (b, c) = 1 \quad (a, c) = 1$$

حاصل $a + b + c$ کدام است؟

- ۳۵ (۱) ۳۶ (۲) ۳۷ (۳) ۳۸ (۴) ۳۹ (۵)

۳۸۹. در شبکه زیر که فاصله هر دو نقطه مجاور عمودی و افقی یک واحد است، دو جفت مستطیل مشخص شده‌اند که دارای مساحتی

برابر و محیط‌های نابرابر هستند. چند جفت مختلف دیگر با این شرایط می‌توان پیدا کرد؟



- ۱ (۱)
 ۲ (۲)
 ۳ (۳)
 ۴ (۴)
 ۵ (۵)

۳۹۰. عدد شش‌رقمی $648XYZ$ هم بر ۸، هم بر ۹ و هم بر ۱۱ بخش‌پذیر است. $X + Y - Z$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵)

۳۹۱. دو توده سنگریزه داریم که در یکی ۳۰ و در دیگری ۷۲ سنگریزه وجود دارد. سه نفر به نام‌های A، B و C باهم بازی زیر را انجام می‌دهند. هر کس در نوبت خود از یک توده به اندازهٔ مضربی از تودهٔ دیگر سنگریزه حذف می‌کند. کسی که در نوبت خود آخرین سنگریزهٔ یک توده را بردارد، برندهٔ بازی بوده و ۳ امتیاز می‌گیرد، نفر بعدی که نوبتش است، ۱ امتیاز و نفر آخر ۲ امتیاز می‌گیرد. اگر ترتیب نوبت آن‌ها A، B، C، A، B و ... باشد و هر سه نفر باهوش باشند، نتیجهٔ بازی چه خواهد بود؟

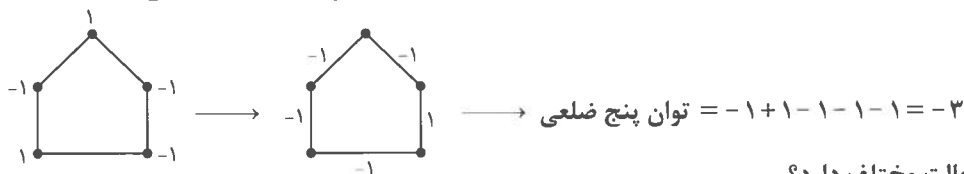
- (۱) $C=2, B=1, A=3$
 (۲) $C=3, B=2, A=1$
 (۳) $C=1, B=2, A=3$
 (۴) $C=1, B=3, A=2$
 (۵) $C=2, B=3, A=1$

۳۹۲. $\lfloor x \rfloor$ نزدیک‌ترین مربع کامل به عدد طبیعی x و $\lceil x \rceil$ نزدیک‌ترین مکعب کامل به عدد طبیعی x است. به عنوان مثال $\lfloor 3.6 \rfloor = 3$ و $\lceil 3.6 \rceil = 4$ است. چند عدد کوچک‌تر از ۱۰۰ وجود دارد که به ازای آن‌ها $\lceil x \rceil \lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor \lfloor x \rfloor$ باشد؟

- (۱) ۸
 (۲) ۱۲
 (۳) ۱۶
 (۴) ۱۸
 (۵) ۲۴

* باتوجه به توضیحات زیر به سؤال‌های ۳۹۳، ۳۹۴ و ۳۹۵ پاسخ دهید.

روی رأس‌های یک n ضلعی ۱ یا -۱ قرار می‌دهیم. روی هر ضلع n ضلعی، حاصلضرب عددهای رأس‌های آن ضلع را می‌نویسیم. مجموع عددهای روی ضلع‌های n ضلعی را توان n ضلعی می‌نامیم. برای نمونه عدد توان پنج ضلعی زیر را به دست می‌آوریم:



۳۹۳. عدد توان یک پنج ضلعی، چند حالت مختلف دارد؟

- (۱) ۱۱
 (۲) ۱۰
 (۳) ۷
 (۴) ۵
 (۵) ۳

۳۹۴. عدد توان یک چند ضلعی صفر است. چند عدد از عددهای ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹ می‌تواند تعداد ضلع‌های آن چندضلعی باشد؟

- (۱) صفر
 (۲) ۱
 (۳) ۲
 (۴) ۳
 (۵) ۴

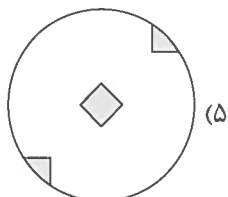
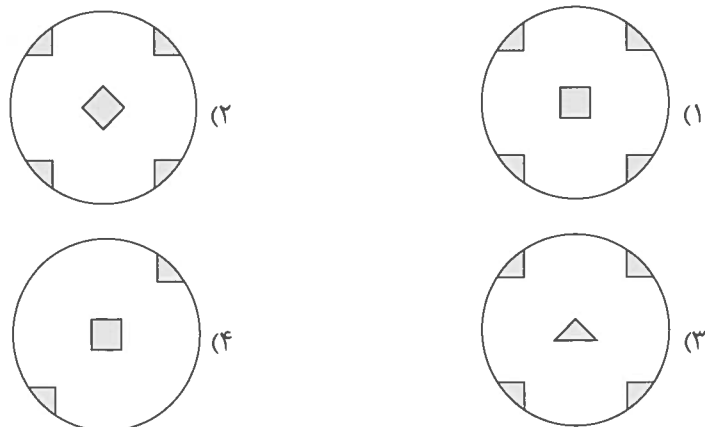
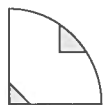
۳۹۵. اگر عدد توان یک n ضلعی برابر ۱۰ باشد، از بین عددهای زیر چند عدد می‌تواند توان آن n ضلعی باشد؟

۶، ۵، ۴، ۳، ۲، ۱، ۰، -۱، -۲، -۳، -۴، -۵، -۶

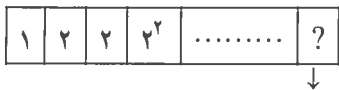
- (۱) صفر
 (۲) ۴
 (۳) ۶
 (۴) ۱۲
 (۵) ۱۳

۳۹۶. دایره‌ای کاغذی را دوبار از وسط تا می‌زنیم و قسمت‌های تیره را قیچی می‌کنیم.

بعد از این که دوباره کاغذ را باز کردیم، به چه شکلی دیده می‌شود؟



۳۹۷. در نوار مربوطه، عدد هر خانه از ضرب عددهای دو خانه قبلی به دست می آید. عدد خانه ۱۳ ام کدام گزینه است؟



خانه ۱۳ ام

- ۲^{۱۴۴} (۵) ۲^{۸۹} (۴) ۲^{۵۵} (۳) ۲^{۱۳} (۲) ۲^{۱۲} (۱)

۳۹۸. در مثلث متساوی الساقین $\triangle ABC$ ($AB = AC$) است. نقاط M و N روی ضلع BC به گونه ای قرار دارند که AM و AN

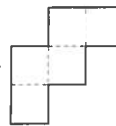
زاویه \hat{BAC} را به سه قسمت مساوی تقسیم می کنند. اگر $\hat{AMB} = 95^\circ$ باشد، اندازه \hat{BAC} کدام است؟ (نقطه M به B نزدیک تر است.)

- ۸۰° (۵) ۵۰° (۴) ۴۵° (۳) ۳۰° (۲) ۲۰° (۱)

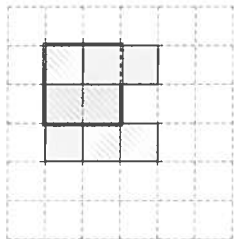
۳۹۹. چند عدد اول بین ۳۰۰ و ۳۱۰ وجود دارد؟

- ۵ (۵) ۴ (۴) ۳ (۳) ۲ (۲) ۱ (۱)

۴۰۰. حداقل چند بار باید روی یک صفحه شطرنجی مهر زد تا یک مربع 4×4 رنگی روی صفحه



با یک مهر به شکل



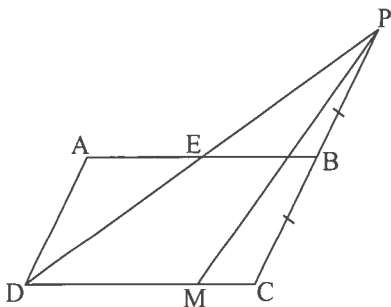
به وجود آید؟ (مثلاً برای به وجود آوردن یک مربع 2×2 ، باید حداقل ۲ بار مهر زد)

- ۶ (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۵ (۵)
۴ (۴)

۴۰۱. صد کارت با شماره های ۱ تا ۱۰۰ با هم آمیخته می شوند و به پشت روی میز قرار می گیرند. مجتبی و نگار هر کدام یک کارت به صورت اتفاقی برمی دارند و بدون این که آن را به کسی نشان دهند، شماره آن را می بینند. سپس روژینا کارت دیگری را به صورت اتفاقی برمی دارد و شماره آن را به همه نشان می دهد. چه قدر احتمال دارد که شماره کارت روژینا بین شماره های کارت های مجتبی و نگار باشد؟

- $\frac{1}{2}$ (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{6}$ (۴) $\frac{1}{8}$ (۵)

۴۰۲. $PB = BC$ و $\frac{MC}{DM} = \frac{1}{3}$ است. اگر مساحت متوازی الاضلاع ۱۶ باشد، مساحت مثلث PMC چند است؟



- $\frac{16}{3}$ (۱) ۲ (۲) $\frac{17}{8}$ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵)

۴۰۳. اعداد طبیعی a و b بزرگ‌تر از ۱ هستند، به طوری که: $(a, b) + [a, b] = ۷۳$ است. مقدار $a + b$ کدام است؟

- ۱۳ (۱) ۱۷ (۲) ۱۹ (۳) ۲۳ (۴) ۲۹ (۵)

۴۰۴. در عبارت $\frac{\square^2 + 1}{\square^2 + 1}$ به جای \square می‌توانیم یک عدد قرار دهیم. کدام یک از عددهای زیر نمی‌تواند حاصل این عبارت باشد؟

- $\frac{۱۴}{۲۷}$ (۵) $\frac{۵۰}{۹۹}$ (۴) $\frac{۱۰۱}{۲۰۱}$ (۳) $\frac{۱}{۲}$ (۲) $\frac{۱۰}{۱۹}$ (۱)

۴۰۵. \overline{aba} یک عدد سه‌رقمی است. چند مقدار برای n وجود دارد، به طوری که:

$$1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1 = \overline{aba}$$

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ هیچ مقدار (۵)

۴۰۶. چند عدد طبیعی شش‌رقمی داریم که هم مربع کامل باشند و هم بر ۷ بخش پذیر باشند؟

- ۹۶ (۱) ۹۷ (۲) ۹۸ (۳) ۹۹ (۴) ۱۰۰ (۵)

۴۰۷. به چند طریق مختلف می‌توان اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ را در یک ردیف پشت سرهم نوشت، به شرطی که مجموع هر سه عدد متوالی بر ۳ بخش پذیر باشد؟

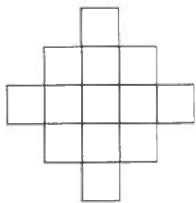
- ۱۶ (۱) ۲۴ (۲) ۳۲ (۳) ۴۸ (۴) ۹۶ (۵)

۴۰۸. حداکثر چند تا از اعداد زیر می‌تواند منفی باشد؟

$$a(e-b), b(a-c), c(b-d), d(c-e), e(d-a)$$

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵) پنج

۴۰۹. وجه‌های تعدادی مکعب کوچک را به هم می‌چسبانیم تا حجمی درست شود که از نمای روبه‌رو، راست و بالا به این شکل دیده می‌شود:



این حجم را داخل سطل رنگ فرو می‌بریم و خارج می‌کنیم و تمام مکعب‌های کوچک را از هم جدا می‌کنیم. چند مکعب کوچک، هیچ وجه رنگی‌ای ندارند؟

- ۱ (۱) ۷ (۲) ۱۵ (۳) ۱۹ (۴) ۲۷ (۵)

۴۱۰. تمام اعداد ممکن با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ (بدون تکرار ارقام) را از کوچک به بزرگ نوشته‌ایم:

۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۱۲، ۱۳، ...

مثلاً دهمین عدد ۱۵ است. عدد ۱۰۰۰ ام کدام است؟

- ۶۵۳۱ (۱) ۵۳۱۲۶ (۲) ۵۱۲۴۶ (۳) ۶۴۳۱ (۴) ۶۴۳۲ (۵)

۴۱۱. a ، b و c سه عدد طبیعی متمایز هستند که $a + b + c = ۷۰۰$ ، حداکثر مقدار (a, b, c) کدام است؟ (منظور از (a, b, c) همان ب.م.م a ، b و c است).

- (۱) ۷۰ (۲) ۱۰۰ (۳) ۱۴۰ (۴) ۱۷۵ (۵) ۳۵۰

۴۱۲. روی ۱۰ کارت عددهای ۲، -۲ ، $۲^۳$ ، $-۲^۴$ ، ... و $۲^۱ -$ نوشته شده است. در هر مرحله، دو کارت با مقادیر a ، b برمی‌داریم و کارت

جدیدی با مقدار $\frac{a \times b}{a + b}$ جایگزین آن دو کارت می‌کنیم. بعد از ۹ مرحله، چه اتفاقی می‌افتد؟

- (۱) بیش از یک کارت باقی می‌ماند.
 (۲) یک کارت باقی می‌ماند که مقدار آن مشخص نیست.
 (۳) یک کارت باقی می‌ماند که مقدار آن صفر است.
 (۴) یک کارت باقی می‌ماند که مقدار آن $\frac{۱۰۲۴}{۳۴۱}$ است.
 (۵) یک کارت باقی می‌ماند که مقدار آن $\frac{۵۱۲}{۸۵}$ است.

*** با توجه به توضیحات زیر، به پرسش‌های ۴۱۳، ۴۱۴ و ۴۱۵ پاسخ دهید.***

جدول تیمی، جدولی است که در کنار سطرها نام افراد و بالای ستون‌ها نام تیم‌ها نوشته می‌شود و در خانه‌های جدول عددهای صفر و ۱ قرار می‌دهیم، به این معنا که آن فرد در آن تیم قرار دارد یا خیر. برای مثال جدول روبه‌رو نشان می‌دهد که تیم A شامل اعضای a ، c است، تیم B شامل اعضای a ، b و c است و در نهایت تیم c شامل اعضای a ، b ، c و d است.

	A	B	C
a	۱	۱	۱
b	۰	۱	۱
c	۱	۱	۱
d	۰	۰	۱

*** توجه کنید که با جابه‌جایی ستون‌ها، جدول تیمی جدید ایجاد نمی‌شود. به عبارتی جدول تیمی زیر، همان جدول تیمی بالا است.**

	B	C	A
a	۱	۱	۱
b	۱	۱	۰
c	۱	۱	۱
d	۰	۱	۰

۴۱۳. جدول تیمی مربوط به چهار نفر a, b, c و d را می‌نویسیم، به شرط این‌که بدانیم هر تیم حداقل یک عضو دارد. بیشترین تعداد ستون‌های این جدول چند است؟

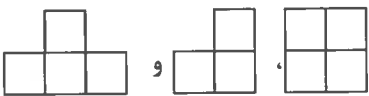
- ۴ (۱) ۷ (۲) ۱۰ (۳) ۱۵ (۴) ۱۷ (۵)

۴۱۴. جدول تیمی کامل چند نفر را به این صورت تعریف می‌کنیم که در این جدول همه تیم‌هایی را که می‌توان با آن افراد ساخت دیده شوند (هر تیم حداقل یک عضو دارد). جدول تیمی کامل ۵ نفر با نام‌های a, b, c, d, e کشیده شده است. چند تیم هستند که a در آن‌ها حضور دارد و d در آن‌ها حضور ندارد؟

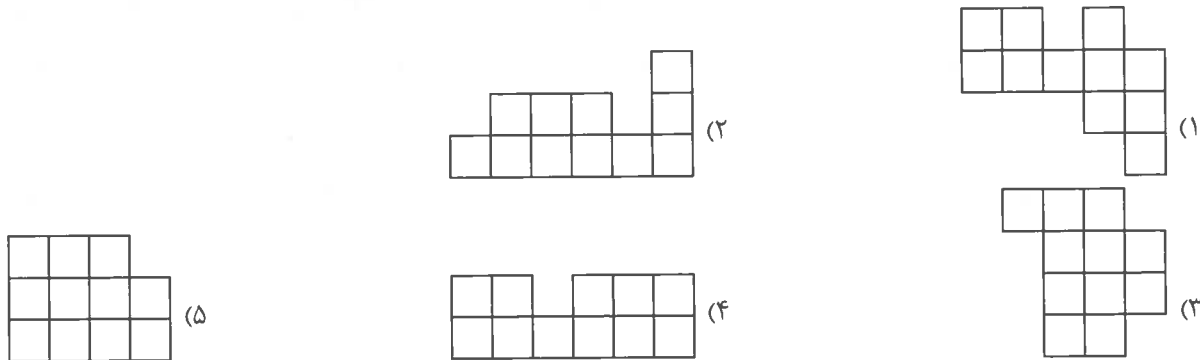
- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۷ (۴) ۸ (۵)

۴۱۵. با ۱۰ نفر چند جدول تیمی می‌توان ایجاد کرد؟

- ۹ (۱) ۱۰ (۲) $2^9 - 1$ (۳) $2^{10} - 1$ (۴) $2^{10} - 23 - 1$ (۵)

۴۱۶. کدام یک از شکل‌های زیر را نمی‌توان با کنار هم قرار دادن کاشی‌های به شکل  ساخت؟

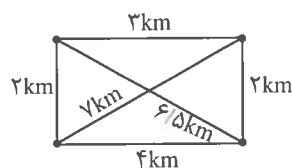
(می‌توان کاشی‌ها را دوران داد)



۴۱۷. اگر $\triangle x = x^3$ و $\square x = x+4$ و $\bigcirc x = 2x$ آنگاه برابر کدام عبارت است؟

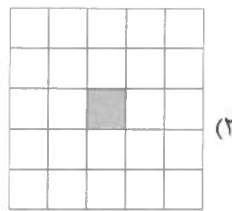
- (۱) $a^3 + (b+4)^3$ (۲) $(6a+b)^3$ (۳) $(4a+b+2)^3$ (۴) $(2a+b+4)^3$ (۵) $(2a)^3 + b^3 + 4^3$

۴۱۸. چهار روستا به شکل روبه‌رو قرار گرفته‌اند. در هر دور، می‌توانیم از یک روستا شروع کنیم به چند روستای دیگر سفر کنیم و در نهایت به روستای اول باز گردیم به طوری که در حین سفر از یک روستا، دو بار عبور نکنیم. طول کوتاه‌ترین دور چند است؟ (دقت کنید جاده‌ها مستقیم نیستند و پیچ و خم دارند).

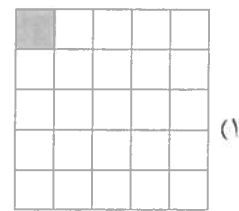


- (۱) ۱۳km (۲) ۱۲/۵km (۳) ۱۲km (۴) ۱۱/۵km (۵) ۱۱km

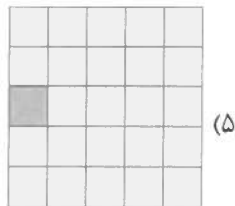
۴۱۹. در جدول 5×5 روبه‌رو، چهار تا مستطیل 2×3 می‌خواهیم قرار دهیم به طوری که هیچ دو تایی روی هم نروند. کدام مربع خالی می‌ماند؟



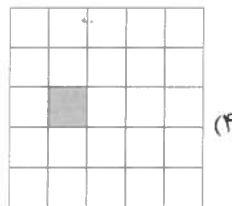
(۲)



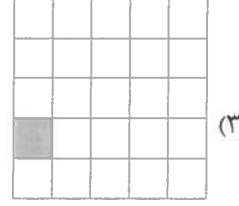
(۱)



(۵)



(۴)



(۳)

۴۲۰. یک مسابقه پرتاب دارت بین چهار نفر برگزار شده است و اطلاعات زیر در مورد امتیازات افراد وجود دارد:

- امتیاز شیما دو برابر امتیاز مهدی است.

- نرگس ۵ امتیاز بیش‌تر از مهدی کسب کرده است.

- شیما ۳ امتیاز بیش‌تر از خسرو کسب کرده است.

- جایزه قهرمان به طور مشترک به دو نفر رسیده است.

مجموع امتیازات این چهار نفر کدام است؟

۳۶ (۵)

۳۴ (۴)

۳۲ (۳)

۳۰ (۲)

۲۸ (۱)

۴۲۱. می‌خواهیم سه دایره و دو خط رسم کنیم. این پنج شکل حداکثر چند نقطهٔ تلاقی می‌توانند داشته باشند؟ (هیچ دو شکلی روی هم منطبق نشوند.)

۲۳ (۵)

۲۱ (۴)

۱۹ (۳)

۱۷ (۲)

۱۵ (۱)

۴۲۲. از بین اعداد طبیعی ۱ تا ۸ به چند طریق می‌توان چهار عدد انتخاب کرد، به طوری که هیچ دو تایی از آن‌ها متوالی نباشند؟

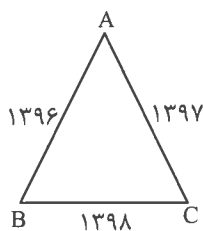
۵ (۵)

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۶ (۱)



۴۲۳. در مورد زوایای مثلث ABC کدام گزینه درست است؟

$\hat{C} > \hat{A} > \hat{B}$ (۲)

$\hat{A} > \hat{B} > \hat{C}$ (۱)

$\hat{A} > \hat{C} > \hat{B}$ (۴)

$\hat{B} > \hat{C} > \hat{A}$ (۳)

$\hat{C} > \hat{B} > \hat{A}$ (۵)

۴۲۴. در یک جعبه مداد رنگی ۱۰ مداد با طول‌های طبیعی وجود دارد به طوری که طول هر دو مداد با هم متفاوت است. اگر مدادها را

مثل شکل به دنبال هم قرار دهیم ۹۷ سانتی‌متر طول خواهند داشت. کم‌ترین مقدار طول ممکن برای بزرگ‌ترین مداد چند



سانتی‌متر است؟

۱۸ (۵)

۱۶ (۴)

۱۵ (۳)

۱۴ (۲)

۱۲ (۱)

۴۲۵. می‌دانیم A کوچک‌ترین عدد سه رقمی است که هر سه شرط زیر را دارد:

- اول است.

- هر سه رقمش اعدادی اول هستند.

- ارقام تکراری ندارد.

مجموع ارقام عدد A کدام است؟

۱۵ (۵)

۱۴ (۴)

۱۳ (۳)

۱۲ (۲)

۱۱ (۱)

۴۲۶. اگر $x \otimes y = \frac{y-x}{xy}$ باشد، حاصل عبارت زیر چند است؟

$$(1398 \otimes 1399) + (1399 \otimes 1400) + \dots + (2018 \otimes 2019)$$

۱ (۲)

$$\frac{1398}{2018} \quad (۱)$$

۱۳۹۸ × ۲۰۱۹ (۴) صفر (۵)

$$\frac{1398 + \dots + 2019}{1398 \times \dots \times 2019} \quad (۳)$$

۴۲۷. دانه لوبیایی سحرآمیز پیدا شده که دارای این خاصیت است که پس از کاشتن آن در پایان روز اول به ارتفاع ۱ متر می‌رسد و از آنجا به بعد در انتهای هر روز یا رشد نمی‌کند و یا اگر رشد کند ارتفاع آن دو برابر می‌شود. ۶ دانه لوبیا کاشته شده‌اند بعد از ۶ روز مجموع ارتفاع لوبیایا برابر با ۶۳ شده است. برای ارتفاع لوبیایا چند حالت مختلف وجود دارد؟

۶ (۵)

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۴۲۸. دنباله «آبی» به دنباله‌ای گفته می‌شود که فقط از حروف a, b تشکیل شده باشد و با a شروع شود و با b تمام شود، مانند (abbaab).

به هر دنباله «آبی» یک عدد طبیعی نسبت می‌دهیم به این صورت که به جای هر b تعداد a های سمت چپ آن را

$$aab \rightarrow 2 \quad abababb \rightarrow 1233$$

می‌نویسیم:

کدام‌یک از اعداد زیر می‌تواند مربوط به یک دنباله آبی باشد؟

۱۱۳۵۷۷ (۵)

۹۸۷۶۳ (۴)

۴۴۶۵۹ (۳)

۵۶۷۹۰ (۲)

۲۳۱۹ (۱)

۴۲۹. درباره اعداد a, b, c, d و e می‌دانیم: $a + b + 1 = b + c - 2 = c + d + 3 = d + e - 4 = e + a + 5$

کوچک‌ترین عدد از بین این پنج عدد کدام است؟

e (۵)

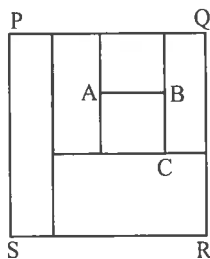
d (۴)

c (۳)

b (۲)

a (۱)

۴۳۰. در شکل روبه‌رو مربع PQRS به پنج مستطیل با مساحت‌های برابر تقسیم شده است. اگر $AB = 5$ ، آن‌گاه طول BC کدام



است؟ (ابعاد شکل دقیق نیست)

$$\frac{5}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{14}{3} \quad (۱)$$

$$\frac{27}{5} \quad (۵)$$

$$\frac{24}{5} \quad (۴)$$

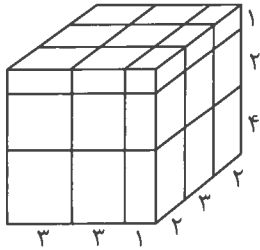
$$\frac{15}{4} \quad (۳)$$

۴۳۱. مجموع همه اعداد طبیعی کوچک تر از ۳۰۰ که بر ۶ بخش پذیر هستند ولی بر ۸ بخش پذیر نیستند کدام است؟

- (۱) ۵۴۷۸ (۲) ۵۷۲۰ (۳) ۶۴۸۲ (۴) ۶۶۳۸ (۵) ۶۷۸۰

۴۳۲. مکعبی با ابعاد $7 \times 7 \times 7$ را مطابق شکل، برش می‌زنیم و مکعب مستطیل‌های کوچک را از هم جدا می‌کنیم در این بین، مکعب

مستطیل با کدام حجم وجود ندارد؟



- (۱) ۸ (۲) ۱۲ (۳) ۱۶ (۴) ۱۸ (۵) ۲۴

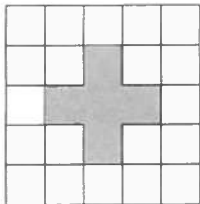
۴۳۳. ۸ سکه یک شکل داریم که یکی از آن‌ها تقلبی است و وزن آن با بقیه تفاوت دارد. حداقل چند بار لازم است از یک ترازوی دو

کفه‌ای استفاده کنیم تا بفهمیم سکه تقلبی سبک‌تر از بقیه است یا سنگین‌تر؟ (نیازی نیست سکه تقلبی را پیدا کنیم!)

- (۱) ۶ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴ (۵) ۵

۴۳۴. تعدادی مکعب به یال ۱ را از یک مکعب به یال ۵ برداشته‌ایم. حاصل شکلی است که از بالا، پایین، راست، چپ، جلو و عقب به

صورت مقابل دیده می‌شود. حداکثر چند مکعب در شکل باقی مانده است؟



- (۱) ۶۴ (۲) ۷۶ (۳) ۸۲ (۴) ۹۴ (۵) ۱۰۰

۴۳۵. اعداد ۱ تا ۱۰۰۰ را در جدول 100×100 روبه‌رو نوشته‌ایم، ۱ تا ۱۰۰ در ردیف اول، ۱۰۱ تا ۲۰۰ در ردیف دوم، ۲۰۱ تا

۳۰۰ در ردیف سوم و پس با یک الگوی مارپیچی اعداد را رنگی می‌کنیم. اعداد ۱۳۹۷، ۱۳۹۸ و ۱۳۹۹ به ترتیب به چند

وضعیتی هستند؟

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
۱۰۱	۱۰۲	۱۰۳	۱۰۴	۱۰۵	۱۰۶	۱۰۷
۲۰۱	۲۰۲	۲۰۳	۲۰۴	۲۰۵	۲۰۶	۲۰۷
۳۰۱	۳۰۲	۳۰۳	۳۰۴	۳۰۵	۳۰۶	۳۰۷
۴۰۱	۴۰۲	۴۰۳	۴۰۴	۴۰۵	۴۰۶	۴۰۷
۵۰۱	۵۰۲	۵۰۳	۵۰۴	۵۰۵	۵۰۶	۵۰۷
۶۰۱	۶۰۲	۶۰۳	۶۰۴	۶۰۵	۶۰۶	۶۰۷
۷۰۱	۷۰۲	۷۰۳	۷۰۴	۷۰۵	۷۰۶	۷۰۷

(۱) سفید، رنگی، سفید

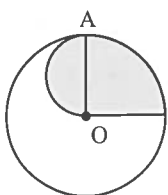
(۲) رنگی، سفید، رنگی

(۳) سفید، سفید، سفید

(۴) سفید، سفید، رنگی

(۵) رنگی، رنگی، رنگی

۴۳۶. در شکل روبه‌رو O مرکز دایره است و نیم‌دایره‌ای به قطر OA رسم شده است. چند درصد دایره تیره است؟



(۱) $\frac{27}{5}\%$

(۲) ۳۰٪

(۳) $\frac{37}{5}\%$

(۴) ۴۰٪

(۵) $\frac{42}{5}\%$

۴۳۷. در مزرعه‌ای فقط گاو، گوسفند و شترمرغ زندگی می‌کنند. می‌دانیم:

- از هر ۲۱ حیوان حداقل یکی گاو است.

- از هر ۲۲ حیوان حداقل یکی شترمرغ است.

این مزرعه حداکثر چند گوسفند دارد؟

۲۱ (۵)

۲۰ (۴)

۱۹ (۳)

۱۸ (۲)

۱۷ (۱)

۴۳۸. عدد طبیعی N دارای این ویژگی است که سمت چپ‌ترین رقم آن برابر ۲ است و اگر این رقم ۲ را به سمت راست عدد منتقل

کنیم، عدد حاصل دو برابر عدد اولیه می‌شود. مجموع ارقام N کدام است؟

۱۵ (۳)

۱۴ (۲)

۱۱ (۱)

(۵) چنین عددی وجود ندارد.

۱۸ (۴)

۴۳۹. در یک سالن ۲۰۰۰ لامپ خاموش با شماره‌های ۱، ۲، ۳، ... و ۲۰۰۰ و هم‌چنین ۱۰۰۰ کلید با شماره‌های ۱، ۲، ... و ۱۰۰۰ موجود است.

چنان‌چه کلید شماره k را بزنیم، لامپ‌های شماره k ، $k+1$ ، $k+2$ ، ... و $2k-1$ تغییر وضعیت می‌دهند (از روشن به خاموش و از خاموش به روشن).

چنان‌چه همه کلیدها را بزنیم، کدام لامپ روشن می‌ماند؟

۱۰۴ (۵)

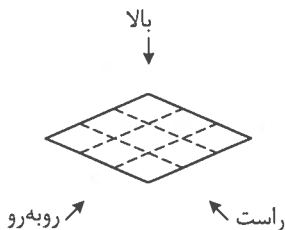
۱۰۰ (۴)

۷۴ (۳)

۸۳ (۲)

۴۷ (۱)

۴۴۰. به چند طریق می‌توان ۱۵ مکعب $1 \times 1 \times 1$ را در زمین 3×3 زیر قرار داد، به طوری که هر سه نما به شکل  باشد؟



۱ (۱)

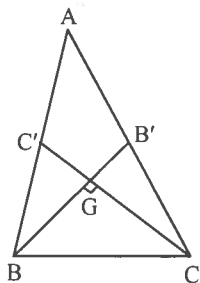
۲ (۲)

۶ (۳)

۸ (۴)

۲۴ (۵)

۴۴۱. در مثلث ABC میانه BB' بر میانه CC' عمود است، اگر $BC = a$ ، $AC = b$ و $AB = c$ ، کدام رابطه همواره برقرار است؟



$$a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2}{5} \quad (۲)$$

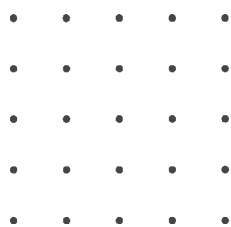
$$a^2 = b^2 + c^2 \quad (۱)$$

$$a^2 = \frac{b^2 + c^2}{3} \quad (۴)$$

$$a^2 = \frac{b^2 + c^2}{5} \quad (۳)$$

$$a^2 = 2\sqrt{b^2 + c^2} \quad (۵)$$

۴۴۲. به چند طریق مختلف می‌توان سه نقطه از ۲۵ نقطه مقابل را انتخاب کرد، به شرطی که این سه نقطه روی یک خط راست باشند؟



۱۴۴ (۱)

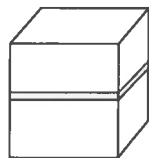
۱۵۲ (۲)

۱۹۶ (۳)

۲۱۴ (۴)

۲۳۶ (۵)

۴۴۳. در شکل مقابل یک مکعب را با یکی از سه کمر بندش می‌بینید. دو مکعب مستطیل A و B داریم که طول سه کمر بند مکعب مستطیل A، ۱۲، ۱۶ و ۲۴ و طول سه کمر بند مکعب مستطیل B، ۱۲، ۱۶ و ۲۰ است. حجم کدام مکعب مستطیل بیش تر است و چند واحد؟



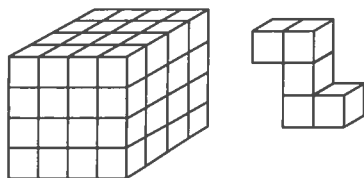
- (۱) A، ۱۳ واحد
 (۲) B، ۱۲ واحد
 (۳) A، ۱۰ واحد
 (۴) B، ۱۳ واحد
 (۵) A، ۱۲ واحد



۴۴۴. فریدون و زهرا سه بچه دارند: محمدجواد، الهه و محسن. این خانواده به همراه دایی رضا می‌خواهند به یک سفر بروند. آن‌ها یک ماشین دارند که به تعدادشان صندلی دارد. یک نفر کنار راننده، دو نفر در ردیف وسط و دو نفر هم در ردیف آخر، از بین آن‌ها فقط فریدون، زهرا و الهه گواهی‌نامه رانندگی دارند. آن‌ها قرار گذاشتند طوری در ماشین بنشینند که هیچ دو نفر با جنسیت یکسان پهلوئی هم نباشند (در یک ردیف نباشند). آن‌ها به چند طریق می‌توانند در این ماشین بنشینند؟

- (۱) ۳۶
 (۲) ۷۲
 (۳) ۱۴۴
 (۴) ۹۶
 (۵) ۱۸۰

۴۴۵. شکل مقابل از ۶۴ مکعب کوچک تشکیل شده است. به چند حالت می‌توان یک قطعه به صورت شکل زیر از آن جدا کرد؟



- (۱) ۴۸
 (۲) ۹۶
 (۳) ۱۴۴
 (۴) ۱۹۲
 (۵) ۲۸۸

۴۴۶. ۱۰۰ گوی با شماره‌های ۱ تا ۱۰۰ درون کیسه‌ای وجود دارند. حداقل چند گوی از کیسه خارج کنیم تا مطمئن شویم در بین شماره‌های خارج شده، سه شماره وجود دارند که اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین آن‌ها کم‌تر از ۷ باشد؟

- (۱) ۲۹
 (۲) ۳۰
 (۳) ۳۱
 (۴) ۳۲
 (۵) ۳۳

۴۴۷. ۲۴ سکه داریم که یکی از آن‌ها تقلبی است و وزن آن از بقیه کم‌تر است. حداقل چند بار لازم است از یک ترازوی دو کفه‌ای استفاده کنیم تا سکه تقلبی را پیدا کنیم؟

- (۱) ۴
 (۲) ۵
 (۳) ۶
 (۴) ۷
 (۵) ۸

۴۴۸. در بسط عبارت زیر، عدد ثابت برابر با کدام گزینه است؟

$$(\sqrt{2}x + x^2)^{100} \left(\frac{1}{x} + x + \dots + x^{99} \right)^{100}$$

- (۱) صفر
 (۲) ۱
 (۳) $\sqrt{2}$
 (۴) $\sqrt{2}^{50}$
 (۵) 2^{50}

۴۴۹. یک جدول ضرب، یک آرایش مستطیلی از اعداد طبیعی است به شرطی که در هیچ سطر و ستون عدد تکراری نداشته باشیم و مقدار هر خانه برابر حاصل ضرب عدد سمت چپ همان سطر در عدد بالای همان ستون باشد. در مثال داده شده یک جدول ضرب 3×4 می‌بینید که شامل ۸ عدد مختلف است (۲، ۳، ۴، ۶، ۸، ۹، ۱۲، ۱۸). در یک جدول ضرب 8×8 حداقل چند عدد مختلف خواهیم داشت؟

x	۳	۴	۲	۶
۲	۶	۸	۴	۱۲
۱	۳	۴	۲	۶
۳	۹	۱۲	۶	۱۸

- (۱) ۱۲
 (۲) ۱۵
 (۳) ۱۷
 (۴) ۳۲
 (۵) ۳۳

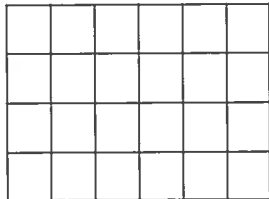
۴۵۰. ۱۵ نفر در ۶ ردیف قرار گرفته‌اند به طوری که هیچ سه ردیفی در یک نفر مشترک نباشند. (هر نفر در اشتراک دو ردیف قرار دارد.) می‌خواهیم در این بین تعدادی محافظ انتخاب کنیم. محافظ فردی است که در یکی از دو ردیفی که در محل تقاطع آن قرار دارد، آخرین نفر باشد. حداکثر تعداد محافظین در این ۱۵ نفر چند است؟ (دقت کنید که ردیف‌ها می‌توانند نسبت به هم هر زاویه‌ای داشته باشند.)

- ۳ (۱) ۵ (۲) ۷ (۳) ۹ (۴) ۱۳ (۵)

۴۵۱. N یک عدد ۵ رقمی است که مربع یک عدد اول متقارن است. (به عددی متقارن می‌گوییم که از دو طرف به یک صورت خوانده شود، مثل ۲۱۲، ۷۳۵۵۳۷) رقم وسط N یک عدد اول است. دو رقم سمت راستش یک عدد اول دو رقمی است. دو رقم سمت چپش دو برابر یک مربع کامل است. مجموع ارقام N کدام است؟

- ۲۳ (۱) ۱۸ (۲) ۲۰ (۳) ۱۶ (۴) ۱۹ (۵)

۴۵۲. مجموع مساحت همه مستطیل‌هایی که در شکل روبه‌رو دیده می‌شود چقدر است؟ (شکل یک مستطیل ۴×۶ است.)



- ۱۱۲۰ (۱)
۱۱۶۰ (۲)
۱۲۰۰ (۳)
۱۲۴۰ (۴)
۱۲۸۰ (۵)

با توجه به متن زیر به سؤالات ۴۵۳ و ۴۵۴ و ۴۵۵ پاسخ دهید.

در یک کیسه تعدادی گوی سفید و سیاه وجود دارد. می‌دانیم تعداد گوی‌های سیاه بیش‌تر از تعداد گوی‌های سفید هستند. یک بازی یک نفره چنین است: یکی یکی و بدون برگرداندن به کیسه گوی‌ها را از کیسه بیرون می‌آوریم و کنار هم می‌گذاریم. به محض این‌که تعداد گوی‌های سفید و سیاهی که بیرون آورده‌ایم برابر باشند بازی تمام می‌شود و برنده می‌شویم: مانند BW یا WWBWB

۴۵۳. کدام یک از دنباله‌های زیر یک بازی برنده را نمایش می‌دهد؟

- WWBWB (۱) WBBWBBWW (۲)
BBWBWWBW (۳) BBWBWBBWW (۴)
(۵) هیچ کدام

۴۵۴. اگر در کیسه در مجموع ۲۰ گوی داشته باشیم و احتمال برد برابر $\frac{1}{۴}$ باشد، چند تا از گوی‌ها سفید است؟

- ۶ (۱) ۱۰ (۲) ۸ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵)

۴۵۵. کدام جمله در مورد این بازی همواره صحیح است؟

(۱) فقط و فقط وقتی می‌توان پیروز شد که اولین گوی خارج شده سفید باشد.

(۲) احتمال برد حداکثر $\frac{1}{۴}$ است.

(۳) اولین و آخرین گوی خارج شده در یک بازی برنده نمی‌توانند هم‌رنگ باشند.

(۴) اگر $۲n$ گوی داخل کیسه باشد، حداکثر تا n حرکت فرصت پیروزی داریم.

(۵) هیچ کدام



پاسخنامه

۱. گزینه ۳؛ تعداد مستطیل‌های 1×1 در پایینی یکی بیش‌تر از بالایی است. $(1390 - 1389 = 1)$

تعداد مستطیل‌های 1×2 در پایینی یکی بیش‌تر از بالایی است. $(1389 - 1388 = 1)$

تعداد مستطیل‌های 1×3 در پایینی یکی بیش‌تر از بالایی است. $(1388 - 1387 = 1)$

همین‌طور ادامه می‌دهیم تا:

تعداد مستطیل‌های 1×1389 در پایینی یکی بیش‌تر از بالایی است. $(2 - 1 = 1)$

تعداد مستطیل‌های 1×1390 در پایینی یکی بیش‌تر از بالایی است. $(1 - 0 = 1)$

پس تعداد مستطیل‌ها در پایینی 1390 تا بیش‌تر از بالایی است.

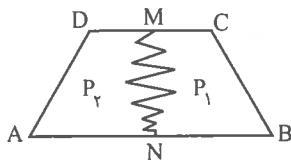
(کیان کریمی فراسانی)

۲. گزینه ۳؛

$$3 \times 2 \times 1 = 6$$

(زهرة پندی)

۳. گزینه ۴؛ 27 سانتی‌متر؛ از آن‌جا که دوزنقه متساوی‌الساقین است و M و N وسط قاعده‌ها هستند پس؛



$$\left. \begin{array}{l} DM = MC \\ AD = BC \\ AN = NB \end{array} \right\} \Rightarrow P_1 \text{ محیط} = P_2 \text{ محیط} = 27$$

(میتبی فغانی ابری)

خط شکسته MN در محیط P_1 و P_2 مشترک است.

۴. گزینه ۴؛ وزن 5 جعبه تخم‌مرغ برابر 12 هندوانه است پس وزن 60 جعبه تخم‌مرغ برابر $12 \times 12 = 144$ هندوانه است و چون وزن هر 4

هندوانه برابر وزن 15 طالبی است و $144 = 4 \times 36$ پس وزن 60 جعبه تخم‌مرغ برابر 15×36 طالبی است. پس وزن 3 جعبه تخم‌مرغ برابر

(میتبی فغانی ابری)

$$27 = \left(\frac{15 \times 36}{4} \right) \text{ طالبی است.}$$

۵. گزینه ۲؛ هر تیم، با 9 تیم دیگر بازی می‌کند، پس باید 90 بازی داشته باشیم ولی در این صورت یک بار بازی تیم A با تیم B و یک

بار دیگر تیم B با تیم A را شمرده‌ایم. پس تعداد بازی‌ها نصف 90 یعنی 45 می‌شود. اگر یک مسابقه مساوی شود، هر تیم 1 امتیاز

می‌گیرد، یعنی در کل 2 امتیاز، و اگر مساوی نشود یکی از تیم‌ها 3 و دیگری صفر امتیاز می‌گیرد، یعنی در کل 3 امتیاز. پس هر بازی 2 یا

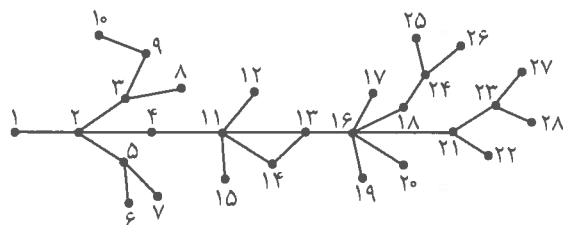
3 امتیاز دربردارد.

حداقل مجموع امتیازها زمانی رخ می‌دهد که همه بازی‌ها مساوی شود. پس مجموع امتیازها می‌شود: $45 \times 2 = 90$

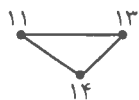
حداکثر مجموع امتیازها زمانی رخ می‌دهد که همه بازی با برد تمام شود. پس مجموع امتیازها می‌شود: $45 \times 3 = 135$

(کیان کریمی فراسانی)

۶. گزینه ۱؛ روستاها را به دلخواه مانند شکل زیر، شماره گذاری می‌نماییم.

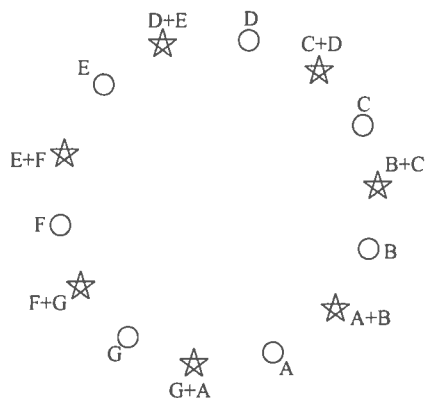


اگر دقت کنیم سه روستای ۱۴، ۱۳ و ۱۱ یک مثلث تشکیل داده‌اند و اگر قرار باشد این سه روستا را طبق شرایط گفته شده، علامت گذاری نماییم، یکی از روستاهای ۱۱ و ۱۳ باید علامت * داشته باشد و دیگری باید بدون علامت باشند، زیرا این دو روستا مجاور هم می‌باشند، بنابراین روستای ۱۴ چه دارای علامت باشد و چه علامت نداشته باشد در هر حالت شرایط صورت سوال را نقض می‌کند. زیرا اگر علامت نداشته باشد، یکی از روستاهای ۱۱ و ۱۳ نیز علامت ندارند و ۱۴ مجاور آن‌هاست و اگر علامت داشته باشد، یکی از روستاهای ۱۱ و ۱۳ علامت دارد و ۱۴ باز هم مجاور آن‌ها می‌باشد. بنابراین این شبکه از روستاها را با این شرایط به هیچ طریق نمی‌توان علامت گذاری کرد.



(مرتضی فغانی ابری)

۷. گزینه ۱؛ اگر جمع کل اعداد را به دست آوریم، عدد درون هر دایره یک بار درون خود دایره حساب می‌گردد و دو بار در ستاره‌های اطراف. به عبارتی عدد درون هر دایره در جمع کل سه بار دیده می‌شود، پس جمع کل اعداد ۳ برابر مجموع اعداد دایره‌ها می‌باشد. اگر مجموع اعداد دایره‌ها را p بنامیم، می‌توان نتیجه گرفت جمع کل اعداد ۳ برابر p می‌باشد.



$$3p = 1 + 2 + \dots + 14 \Rightarrow 3p = \frac{14 \times 15}{2} \Rightarrow 3p = 7 \times 15 \Rightarrow p = 7 \times 5 \Rightarrow p = 35$$

در نتیجه مجموع اعداد دایره‌ها برابر ۳۵ می‌باشد.

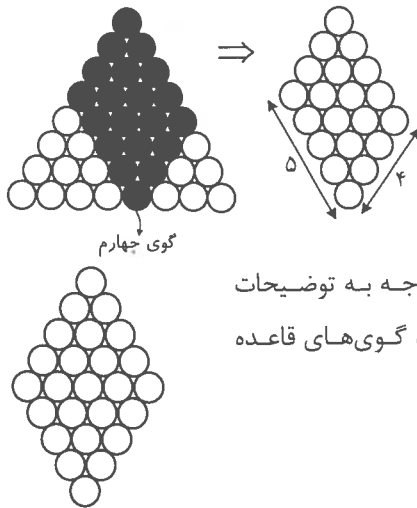
(مرتضی فغانی ابری)

۸. گزینه ۱؛ در ابتدا $f(4)$ را به دست می‌آوریم.

$$f(4) \rightarrow (\text{بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه فرد عدد } 4) = 13 \Rightarrow f(4) = 13$$

و از طرفی می‌دانیم هر عدد، بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه خودش می‌باشد و اگر یک عدد فرد باشد، بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه فرد آن عدد، خودش می‌باشد. پس در نتیجه بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه فرد عدد ۱۳ خود عدد ۱۳ می‌باشد. بنابراین به ازای $n = 1$ ، $f(4) = 13$ می‌باشد.

(مرتضی فغانی ابری)



گوی چهارم

(مرتضی فغانی ابری)

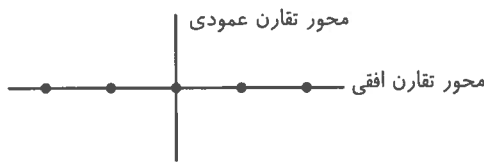
۹. گزینه ۴؛ مثال: اگر یک گوی از قاعده برای مثال گوی ۴م، برداشته شود، شکل کل برداشته شده یک متوازی‌الاضلاع 4×5 می‌باشد. به عبارتی گوی برداشته شده، گوی n م از قاعده‌ی یک متوازی‌الاضلاع $n \times m$ را از شکل جدا می‌کند. با توجه به این که ۲۵ گوی برداشته شده است، در نتیجه متوازی‌الاضلاع برداشته شده فقط می‌تواند یک متوازی‌الاضلاع 5×5 باشد. (می‌توان نتیجه گرفت که تعداد گوی‌های قاعده برابر $m + n - 1$ می‌باشد، بنابراین اگر گوی m م هم برداشته شود باز هم یک متوازی‌الاضلاع $m \times n$ جدا می‌گردد.) با توجه به توضیحات m و n می‌توانند برابر ۵ باشند به عبارتی گوی ۵ از قاعده برداشته شده است و از طرفی تعداد گوی‌های قاعده برابر $m + n - 1$ یا ۹ گوی می‌باشد.

۱۰. گزینه ۴؛ اگر دستمزد او بین ۱۶۰۰۰ تومان تا ۲۰۰۰۰ تومان باشد، با رفتن از طبقه‌ی بالا، میانگین طبقه‌ی بالا افزایش می‌یابد، چون دستمزد او از میانگین این طبقه کم‌تر بوده است. با نقل مکان او به طبقه‌ی پایین، میانگین طبقه‌ی پایین هم افزایش می‌یابد، چون دستمزد او از میانگین این طبقه بیش‌تر بوده است. دقت کنید که اگر دستمزد او بیش‌تر از ۲۰۰۰۰ تومان باشد، با نقل مکان از طبقه‌ی بالا به پایین، میانگین طبقه‌ی پایین افزایش می‌یابد، اما میانگین طبقه‌ی بالا کاهش می‌یابد. (گزینه‌ی ۲ صحیح نیست.)

اگر دستمزد او بیش‌تر از ۲۰۰۰۰ تومان باشد، با نقل مکان از طبقه‌ی پایین به بالا، میانگین طبقه‌ی پایین کاهش می‌یابد و میانگین طبقه‌ی بالا افزایش می‌یابد. (گزینه‌ی ۳ صحیح نیست.)

اگر دستمزد او بین ۱۶۰۰۰ و ۲۰۰۰۰ تومان باشد، با نقل مکان از طبقه‌ی پایین به بالا، میانگین هر دو طبقه کاهش می‌یابد. (گزینه ۵ صحیح نیست.)

۱۱. گزینه ۳؛ محور تقارن یک شکل خطی می‌باشد که اگر هر نقطه از شکل را نسبت به آن خط قرینه کنیم، باز هم روی شکل قرار گیرد. با کمی دقت متوجه می‌شویم که این شکل دارای دو محور تقارن است. با توجه به یکسان بودن فاصله‌ها، یک محور تقارن عمودی دارد و همچنین خط افقی که نقاط روی آن قرار دارند نیز محور تقارن افقی این شکل می‌باشد.



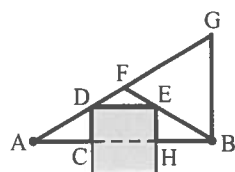
(مرتضی فغانی ابری)

و در نتیجه در مجموع دو محور تقارن دارد.



۱۲. گزینه ۱؛

طبق قضیه‌ی حمار، کوتاه‌ترین فاصله بین دو نقطه در صفحه طول پاره‌خط راست واصل بین آن دو نقطه است. بنابراین روابط زیر برقرارند:



$$FG + GB > FB$$

$$AC + CD > AD$$

$$DF + FE > DE$$

$$EH + HB > EB$$

(مجتبی فغانی ابری)

با توجه به روابط فوق، $AD + DE + EB$ از تمام مسیرهای ممکن، کوتاه‌تر است.

۱۳. گزینه ۲؛ چون ضرب اعداد در چهار گزینه برابر عدد یک گزینه دیگر است، پس ضرب اعداد هر پنج گزینه در هم معادل مرتع عدد گزینه موردنظر است.

$$9 \times \frac{3}{25} \times \frac{1}{15} \times \left(-\frac{1}{25}\right) \times (-5) = \frac{3^3 \times 5}{3 \times 5^5} = \frac{3^2}{5^4}$$

(عمیدرضا بیات)

پس گزینه موردنظر برابر $\sqrt{\frac{3^2}{5^4}}$ یا همان $\frac{3}{25}$ است.

۱۴. گزینه ۲؛

$$\underbrace{(2^7 + 2^7 + 2^7)}_{3 \times 2^7} \times \underbrace{(3^8 + 3^8 + 3^8 + 3^8 + 3^8)}_{5 \times 3^8} \times \underbrace{(5^8 + 5^8 + 5^8 + 5^8)}_{4 \times 5^8}$$

$$3 \times 2^7 \times 5 \times 3^8 \times 4 \times 5^8 = 4 \times 2^7 \times 3 \times 3^8 \times 5 \times 5^8 = 2^2 \times 2^7 \times 3^9 \times 5^9 = 2^9 \times 3^9 \times 5^9 = 3^9$$

(کیان کریمی فراسانی)

۱۵. گزینه ۲؛ مجموع مساحت‌های تمام این قطعات ایجاد شده برابر مجموع مساحت‌های این دو مربع یعنی $4^2 + 3^2 = 25$ است. پس مساحت مربع بزرگ‌تر که با این قطعات درست می‌شود ۲۵ سانتی‌متر مربع است. پس ضلع آن ۵ سانتی‌متر و محیط آن ۲۰ سانتی‌متر است.

(عمیدرضا بیات)

۱۶. گزینه ۴؛

$G \xrightarrow{6} O$ ← از G به ۶ تا O می‌توان رفت

$O \xrightarrow{2} O$ ← از یک O به ۲ تا O دیگر می‌توان رفت

$O \xrightarrow{3} D$ ← از هر O به ۳ تا D می‌توان رفت

$G \xrightarrow{6} O \xrightarrow{2} O \xrightarrow{3} D$

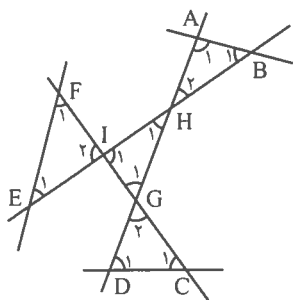
پس داریم:

$$6 \times 2 \times 3 = 36$$

طبق اصل ضرب داریم:

(کیان کریمی فراسانی)

۱۷. گزینه ۳؛



$$\left. \begin{aligned} \hat{A}_1 + \hat{B}_1 + \hat{H}_\gamma &= 180^\circ \\ \hat{C}_1 + \hat{D}_1 + \hat{G}_\gamma &= 180^\circ \\ \hat{E}_1 + \hat{F}_1 + \hat{I}_\gamma &= 180^\circ \\ \hat{I}_1 + \hat{H}_1 + \hat{G}_1 &= 180^\circ \\ \hat{I}_1 = \hat{I}_\gamma, \hat{H}_1 = \hat{H}_\gamma, \hat{G}_1 = \hat{G}_\gamma \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \hat{A}_1 + \hat{B}_1 + \hat{C}_1 + \hat{D}_1 + \hat{E}_1 + \hat{F}_1 \\ &= 3 \times 180^\circ - 180^\circ \\ &= 2 \times 180^\circ = 360^\circ \end{aligned}$$

(مجتبی فغانی ابری)

۱۸. گزینه ۱؛ با توجه به جدول، مقدار b دست کم عدد ۷ می‌باشد. زیرا در یک ردیف ۷ تایی فقط یک خانه رنگ شده است. از طرفی اندازه ضلع

(زهرا پندی)

جدول یک واحد بزرگ‌تر از b است. بنابراین تنها گزینه‌ای که با هر دو شرط بالا مطابقت دارد، گزینه ۱ است.

۱۹. گزینه ۱؛ اگر فرض کنیم k تا از این ۱۹ عدد بیش‌تر از ۲۱ باشند و $k - 19$ تای دیگر از آن‌ها کوچک‌تر یا مساوی ۲۱ باشند. چون مجموع این k عدد برابر ۳۹۰ می‌باشند، پس رابطه زیر برقرار است.

$$1 \times (19 - k) + 22k \geq 390 = \text{مجموع اعداد}$$

زیرا وقتی k عدد بیش‌تر از ۲۱ هستند یعنی حداقل برابر ۲۲ هستند و $k - 19$ عدد دیگر چون طبیعی هستند، حداقل برابر ۱ می‌باشند.

$$\Rightarrow 390 \geq 21k + 19 \Rightarrow 371 \geq 21k \Rightarrow k \leq \frac{371}{21} = \frac{53}{3} = 17\frac{2}{3}$$

(مجتبی فهامی ابری)

پس حداکثر ۱۷ عدد می‌توانند از ۲۱ بزرگ‌تر باشند.

۲۰. گزینه ۲؛ وقتی زاویه بین a و b ، 45° است، قرینه کردن M نسبت به a و سپس نسبت به b ، هم‌ارز دوران 90° فلش M به یک سمت و قرینه کردن M نسبت به b و سپس نسبت به a ، هم‌ارز دوران 90° فلش M به سمت دیگر می‌باشد. پس X و Y در صورتی که زاویه بین a و b ، 45° باشد، هر دو در راستایی عمود بر M و در دو جهت مختلف قرار می‌گیرند. (زهره پندی)

۲۱. گزینه ۳؛ عدد \overline{ab} را در نظر بگیرید. یکان این عدد b و دهگان آن a است.

$$\overline{ab} = 10a + b = a + b + ab \Rightarrow 10a = a + ab \Rightarrow 9a = ab \xrightarrow{a \neq 0} b = 9$$

(زهره پندی)

۹ عدد دو رقمی با یکان ۹ وجود دارد.

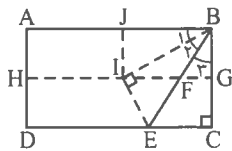
۲۲. گزینه ۳؛

$$2^{2011} = 2^{2010} = (2^1)^{2010} = (1024)^{2010} = (1000)^{2010} = (10^3)^{2010} = 10^{6030}$$

10^{603} عددی است شامل ۱ و 603 تا صفر جلوی آن، که یک عدد 604 رقمی است. با توجه به تقریب‌های زده شده تعداد ارقام عدد 2^{2011} به گزینه ۳ نزدیک‌تر است. (همیدرضا بیات)

۲۳. گزینه ۵؛ در شکل زیر I نشان‌دهنده‌ی جای نقطه‌ی C هنگام تا کردن کاغذ است. بنابراین مثلث‌های BIE و BEC مساوی‌اند و اجزای متناظر آن‌ها نیز مساوی می‌باشند. در مثلث BIJ ، $BI = BC$ و $IJ = \frac{BC}{4}$. پس: $\hat{B}_1 = 30^\circ$ و بدین ترتیب

یعنی گزینه ۳ درست و گزینه ۵ نادرست است. $\triangle BCE = \triangle BCF$ ، $CE = \frac{BE}{4} = BF$.



(زهره پندی)

$$x + y = 5000$$

۲۴. گزینه ۱؛ تعداد بالغ‌ها را x و تعداد نابالغ‌ها را y فرض می‌کنیم. پس داریم:

پس مبلغ عیدی می‌شود:

$$x \times \left(\frac{100 - 70}{100}\right) \times 100000 + y \times 30000 = x \times \frac{3}{10} \times 100000 + y \times 30000 = x \times 30000 + y \times 30000$$

$$= 30000 \times (x + y) = 30000 \times 5000 = 150 \times 10^6$$

(کیان کریمی فراهانی)

۲۵. گزینه ۴؛ اگر تعداد صف‌ها n باشد و تعداد دانش‌آموزان اضافی هر صف نسبت به صف اول را از کل ۶۳۰ دانش‌آموز کم کنیم، تعداد باقی‌مانده باید بر n بخش‌پذیر باشد. تعداد دانش‌آموزان اضافی صف اول صفر، صف دوم ۳، صف سوم ۶، ... و صف n ام $۳(n-1)$ است. پس تعداد کل دانش‌آموزان اضافه برابر است با:

$$۰ + ۳ + ۶ + \dots + ۳(n-1) = ۳(۰ + ۱ + ۲ + \dots + (n-1)) = \frac{۳n(n-1)}{۲}$$

پس $۶۳۰ - \frac{۳n(n-1)}{۲}$ باید بر n بخش‌پذیر باشد. از بین تمام گزینه‌ها فقط به ازای $n=۶$ این مقدار بر n بخش‌پذیر نیست.

(مرتضی فغانی ابری)

۲۶. گزینه ۲؛ با کمی فکر متوجه می‌شویم که روبات بعد از n^2 حرکت ($n \in \mathbb{N}$) روی محور مختصات است و اگر n^2 فرد باشد روی محور X ها است و اگر n^2 زوج باشد روی محور Y ها. همچنین اگر دقت کنید در حرکت n^2 به شرطی که n^2 فرد باشد، روی نقطه‌ی $\begin{bmatrix} n-1 \\ 0 \end{bmatrix}$ است و اگر زوج باشد $\begin{bmatrix} 0 \\ n-1 \end{bmatrix}$. حرکت بعدی‌اش نیز روی محور است و در حرکت بعدی ۹۰° می‌چرخد. پس برای حرکت دویستم باید جذر تقریبی ۲۰۰ را حساب کرد.

پس در حرکت ۱۹۶ روی محور Y ها و در نقطه‌ی $\begin{bmatrix} 0 \\ ۱۳ \end{bmatrix}$ قرار دارد:

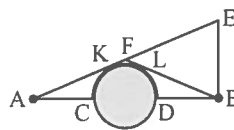
$$۱۹۶ \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ ۱۳ \end{bmatrix} \quad ۱۹۷ \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ ۱۴ \end{bmatrix} \quad ۱۹۸ \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ ۱۴ \end{bmatrix} \quad ۱۹۹ \rightarrow \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱۴ \end{bmatrix} \quad ۲۰۰ \rightarrow \begin{bmatrix} ۳ \\ ۱۴ \end{bmatrix}$$

(کیان کریمی فراسانی)

۲۷. گزینه ۲؛ طبق قضیهٔ حمار کوتاه‌ترین فاصله بین دو نقطه در صفحه طول پاره‌خط راست واصل بین آن دو



نقطه است. از طرفی از میان دو منحنی محدب رسم شده بین دو نقطه، مسیر منحنی‌ای که به خط راست واصل بین آن دو نقطه نزدیک‌تر است از دیگری کوتاه‌تر می‌باشد، بنابراین روابط زیر برقرارند:



$$AC + \widehat{CK} > AK \quad KF + FL > \widehat{KL} \quad \widehat{LD} + DB > LB$$

$$FE + EB > FL + LB$$

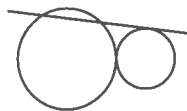
(K و L محل تماس هستند)

با توجه به روابط فوق، $AK + \widehat{KL} + LB$ از تمام مسیرهای ممکن کوتاه‌تر است.

۲۸. گزینه ۵؛ برای نشان دادن درستی سایر گزینه‌ها به شکل‌های زیر توجه کنید:



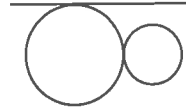
تا ۴



تا ۳



تا ۲



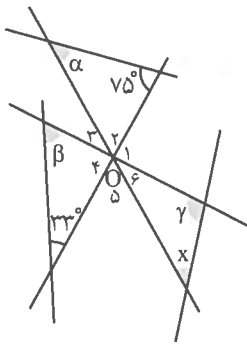
یکی

توجه داشته باشید که یک خط راست، یک دایره را حداکثر در دو نقطه قطع می‌کند لذا حداکثر ۴ نقطه برای تعداد نقاط برخورد خطی

با دو دایرهٔ مماس خارج وجود خواهد داشت.

(مجتبی فغانی ابری)

۲۹. گزینه ۳؛ با توجه به شکل داریم:



$$\hat{O}_1 + \hat{O}_2 + \hat{O}_3 + \hat{O}_4 + \hat{O}_5 + \hat{O}_6 = 360^\circ \quad (1)$$

از طرفی داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{O}_1 = \hat{O}_4 \\ \hat{O}_2 = \hat{O}_5 \\ \hat{O}_3 = \hat{O}_6 \end{array} \right\} \xrightarrow{(1)} 2\hat{O}_2 + 2\hat{O}_4 + 2\hat{O}_6 = 360^\circ \Rightarrow \hat{O}_2 + \hat{O}_4 + \hat{O}_6 = 180^\circ \quad (2)$$

حال چون مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است، پس:

$$\hat{\alpha} + 75^\circ + \hat{O}_2 = 180^\circ$$

$$\hat{\beta} + 33^\circ + \hat{O}_4 = 180^\circ$$

$$\hat{\gamma} + \hat{x} + \hat{O}_6 = 180^\circ$$

$$\hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma} + \hat{x} + 108^\circ + \hat{O}_2 + \hat{O}_4 + \hat{O}_6 = 540^\circ \xrightarrow{(2)} \hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma} + \hat{x} = 540^\circ - 108^\circ - 180^\circ = 252^\circ$$

(مرتضی فطامی ابری)

۳۰. گزینه ۵؛ بررسی گزینه‌ها:

گزینه ۱: غلط می‌باشد چون می‌توانیم دو درخت داشته باشیم که تعداد برگ‌های هر کدام ۱۰ برگ داشته باشند.

گزینه ۲: غلط می‌باشد چون ممکن است همه درخت‌های جنگل ۱۰۰۰۰۰۰ برگ داشته باشند.

گزینه ۳: غلط می‌باشد چون باز هم ممکن است همه درخت‌های جنگل ۱۰۰۰۰۰۰ برگ داشته باشند و بیش از دو درخت با تعداد برگ یکسان وجود داشته باشد.

گزینه ۴: غلط می‌باشد چون ممکن است همه درختان یک برگ داشته باشند.

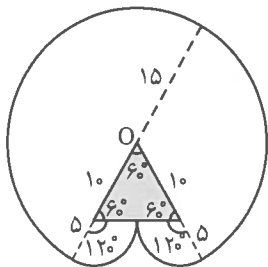
گزینه ۵: صحیح می‌باشد چون تعداد درختان از کل تعداد حالات برگ‌های یک درخت بیش‌تر می‌باشد و در نتیجه دو درخت با تعداد برگ یکسان وجود دارد. در غیر این صورت تعداد درختان باید کوچک‌تر یا مساوی تعداد حالات برگ‌های یک درخت می‌بود.

(مرتضی فطامی ابری)

۳۱. گزینه ۳؛ ناحیه‌ای که این سگ می‌تواند در آن حرکت کند شامل قسمتی از یک دایره به زاویه $30^\circ (= 60^\circ - 30^\circ)$ و به شعاع ۱۵

متر و دو قسمت دیگر از دو دایره کوچک‌تر به زاویه $12^\circ (= 60^\circ - 18^\circ)$ و به شعاع ۵ متر می‌باشد. پس مساحت ناحیه موردنظر برابر

است با:



$$\frac{5}{6} \times 15^2 \times \pi + 2 \times \frac{1}{3} \times 5^2 \times \pi = \frac{1125\pi}{6} + \frac{50\pi}{3} = \frac{1225\pi}{6} \approx 204\pi$$

توجه داشته باشید که 30° از یک دایره برابر $\frac{5}{6}$ از مساحت آن دایره و 12° از یک دایره برابر $\frac{1}{3}$ مساحت آن دایره می‌باشد.

(مرتضی فطامی ابری)

۳۲. گزینه ۲؛ در شکل، ۳ مستطیل بزرگ دیده می‌شود (دو مستطیل بالا و یک مستطیل پایین شکل) که تنها یکی از آن‌ها رنگ شده است، همچنین ۳ مربع که تنها یکی از آن‌ها رنگ شده است و... بدین ترتیب می‌توان دریافت که $\frac{1}{3}$ کل شکل رنگ شده است.

(زهرة پندی)

۳۳. گزینه ۵؛ واضح است بین این ۱۰ تیم، ۴۵ بازی انجام شده است. $(\frac{10 \times 9}{2} = 45)$ همچنین اگر در یک بازی دو تیم نتیجه مساوی بگیرند، ۲ امتیاز در کل دارد (هر تیم ۱ امتیاز می‌گیرد) و اگر برنده داشته باشد، ۳ امتیاز (یک تیم ۳ امتیاز و تیم دیگر صفر امتیاز). حال تعداد بازی‌هایی که مساوی شده است را y و تعداد بازی‌هایی که برنده داشته‌اند را x فرض می‌کنیم، پس داریم:

$$\begin{cases} x + y = 45 \\ 3x + 2y = 115 \end{cases} \Rightarrow x = 25, y = 20$$

(کیان کریمی فراسانی)

۳۴. گزینه ۲؛ سن سه دختر را در سال ۱۳۸۹ به ترتیب a ، b و c فرض کنید. بنابراین مجموع عیدی‌ها در سال ۱۳۸۹ و سال ۱۳۹۰ برابر است با:

$$1389: ab + bc + ac$$

$$1390: (a+1)(b+1) + (a+1)(c+1) + (b+1)(c+1) = ab + ac + bc + 2(a+b+c) + 3$$

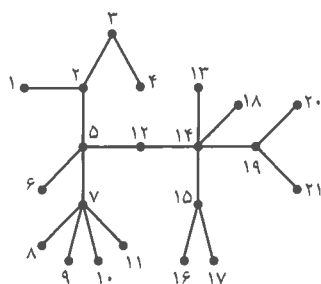
پس تفاضل عیدی‌ها در دو سال برابر است با:

$$ab + ac + bc + 2(a+b+c) + 3 - (ab + ac + bc) = 2(a+b+c) + 3 = 33 \Rightarrow 2(a+b+c) = 30 \Rightarrow a+b+c = 15$$

(کیان کریمی فراسانی)

پس مجموع سن آن‌ها برابر با ۱۵ است.

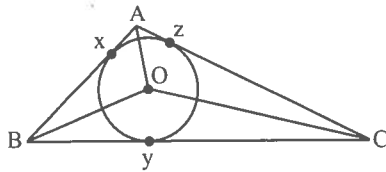
۳۵. گزینه ۲؛ روستاها را به دلخواه مانند شکل زیر شماره‌گذاری می‌کنیم.



برای روستای ۱ دو حالت وجود دارد یا دارای چاه آب می‌باشد یا نمی‌باشد یعنی علامت * دارد یا این که بدون علامت می‌باشد. اگر روستای ۱ علامت * داشته باشد، روستای مجاور آن یعنی روستای ۲ نباید علامت * داشته باشد، و در نتیجه پس از آن، روستاهای مجاور روستای ۲ یعنی ۳ و ۵ دارای علامت * می‌باشد، چون گفته شده از هر دو روستای مجاور حداقل یکی دارای چاه آب است یا به عبارتی علامت * دارد به همین ترتیب روستاهای ۶، ۷، ۱۲ و ۴ علامت ندارند و روستاهای ۸، ۹، ۱۰، ۱۱ و ۱۴ دارای علامت می‌باشند و به همین ترتیب کل شکل به صورت کاملاً یکتا علامت‌گذاری می‌گردد. و اگر روستای ۱ دارای علامت * نباشد پس روستای ۲ علامت دارد و روستاهای ۳ و ۵ علامت ندارند و به همین ترتیب روستاهای ۶، ۷ و ۱۲ علامت دارند و... پس باز هم به صورت کاملاً یکتا کل شبکه علامت‌گذاری می‌گردد. در نتیجه در مجموع دو حالت علامت‌گذاری وجود دارد.

(مهرتقی فغانی ابری)

۳۶. گزینه ۳؛ می‌دانیم در هر مثلث سه نیم‌ساز، هم‌رس هستند و محل هم‌رسی سه نیم‌ساز مرکز دایره‌ی محاطی هر مثلث می‌باشد. به شکل زیر توجه کنید:



O محل هم‌رسی سه نیم‌ساز زوایای A، B و C می‌باشند. می‌دانیم Ox، Oy و Oz به ترتیب بر اضلاع AB، BC و AC عمود می‌باشند و از طرفی شعاع دایره‌ی محاطی می‌باشند. می‌توان گفت نقطه‌ای که دورترین فاصله را تا دریا دارد همان O، مرکز دایره‌ی محاطی می‌باشد. زیرا در غیر این صورت هر نقطه‌ی دیگری را در نظر بگیرید داخل یکی از مثلث‌های AOC یا AOB یا BOC می‌افتد که در نتیجه فاصله‌ی آن نقطه تا دریا و یا به عبارتی فاصله‌ی آن از اضلاع AC، AB یا BC از فاصله‌ی O تا آن اضلاع کم‌تر می‌باشد. پس جواب همان مرکز دایره‌ی محاطی می‌باشد.

(مرتضی فغامی ابری)

۳۷. گزینه ۳؛

PERSIANGULFPERSIANGULF...

این عبارت دارای ۱۱ حرف می‌باشد و هنگامی که ۱۰۰ بار این عبارت را در کنار هم قرار دهیم دارای ۱۱۰۰ حرف می‌شود. قرار است در هر مرحله آن حروفی که شماره جایگاه آن‌ها مضرب ۳ نمی‌باشند را حذف نماییم و بقیه‌ی حروف کنار هم نوشته شود و این کار را ادامه دهیم. ابتدا برای تمامی این ۱۱۰۰ حرف شماره جایگاه در نظر می‌گیریم:

۱(P) ۲(E) ۳(R) ۴(S) ۵(I) ۶(A) ۷(N) ۸(G) ۹(U) ۱۰(L) ۱۱(F) ۱۲(P) ...

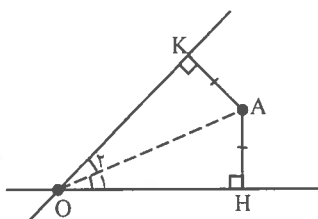
در مرحله اول پس از حذف، فقط اعداد با شماره جایگاه زیر باقی می‌مانند:

۳ ۶ ۹ ۱۲ ۱۵ ۱۸ ۲۱...

که حالا حرف R با شماره جایگاه ۳ در ابتدای کار، در جایگاه ۱ قرار می‌گیرد و هم‌چنین حرف A در جایگاه دوم و حرف U در جایگاه سوم و ... باز هم حروف قرار گرفته شده در جایگاه‌هایی که مضارب ۳ نمی‌باشند را حذف می‌کنیم و فقط حروف با جایگاه ۹، ۱۸، ۲۷، ... باقی می‌مانند و این کار ادامه می‌یابد، با کمی دقت می‌توان فهمید که در مرحله‌ی بعد اعدادی که در تجزیه‌ی آن‌ها توان عامل ۳ عدد ۲ می‌باشد باقی می‌مانند. در مرحله‌ی بعدی اعدادی که در تجزیه‌ی آن‌ها توان عامل ۳ عدد ۳ می‌باشند، باقی می‌مانند و در نتیجه در انتهای کار، آخرین حرفی که باقی می‌ماند حرفی است که در تجزیه‌ی شماره‌ی جایگاه آن، بزرگ‌ترین توان ۳ در بین ۱۱۰۰ عدد اول ظاهر شود یعنی 3^6 یا به عبارتی ۷۲۹ می‌باشد. در نتیجه حرف با شماره جایگاه ۷۲۹ آخرین حرف باقی‌مانده می‌باشد پس باید حرف ۷۲۹ام را پیدا نماییم بدین منظور باقی‌مانده‌ی تقسیم ۷۲۹ را بر ۱۱ (یعنی تعداد حروف PERSIANGULF) به دست می‌آوریم که برابر با ۳ می‌شود، پس R یعنی سومین حرف PERSIANGULF حرف نهایی می‌باشد.

(مرتضی فغامی ابری)

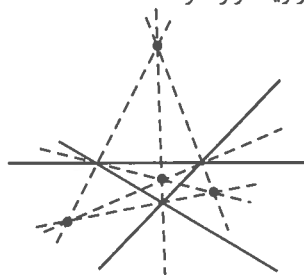
۴۱. گزینه ۵؛ نقطه‌ای از دو خط متقاطع به یک فاصله است که روی نیم‌ساز یکی از زاویه‌های تشکیل شده توسط آن دو خط قرار داشته باشد.



$$\left. \begin{array}{l} AH = AK \\ \hat{H} = \hat{K} = 90^\circ \\ AO = AO \end{array} \right\} \text{ض } \triangle AOH = \triangle AOK \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2$$

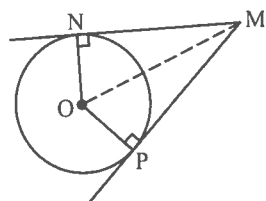
پس اگر نقطه‌ای از سه خط d_1, d_2, d_3 به یک فاصله باشد باید روی محل برخورد نیم‌ساز زاویه‌های مربوط به رئوس متفاوتی از مثلث تشکیل شده باشد. پس کافی است نیم‌سازهای زاویه‌های تشکیل شده را رسم کنیم و محل برخورد نیم‌ساز زاویه‌های رئوس متفاوت را بشماریم که چهار نقطه به دست می‌آید.

اما به یک نکته مهم باید توجه کنیم، این که از محل برخورد دو نیم‌ساز، نیم‌ساز زاویه رأس دیگر عبور می‌کند. علت این موضوع نیز این است که نیم‌ساز مکان هندسی نقاطی است که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله هستند، یعنی هر نقطه روی نیم‌ساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است و از طرفی هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد روی نیم‌ساز آن زاویه قرار دارد.



(مجتبی فغانی ابری)

۴۲. گزینه ۳؛ اگر دو خط متقاطع بر یک دایره مماس باشند فاصله محل برخورد دو خط تا محل تماس‌ها، یکسان است، زیرا اگر از O مرکز دایره به P, N وصل کنیم شعاع‌های دایره بر PM, NM عمود می‌شوند و دو مثلث OMP, ONM یک‌دیگر برابر می‌شوند پس $PM = NM$ حال به مسأله برمی‌گردیم. اگر محل تماس دایره با ضلع BC را A' بنامیم، بنابر آن چه بیان شد، داریم:



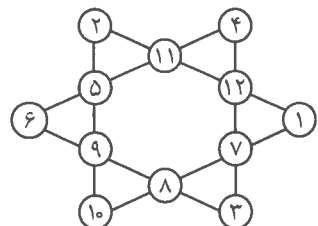
(مجتبی فغانی ابری)

$$AB' = AC', CC' = CA', BB' = BA'$$

$$\text{محیط مثلث} = AB + BA' + A'C + CA = AB + BB' + CC' + CA = AB' + AC' = 2AC'$$

$$AC' = \frac{1}{2} \text{ محیط مثلث} \Rightarrow AC' = 6/5$$

۴۳. گزینه ۲؛ چون هر عدد در دو ردیف ظاهر می‌شود پس حاصل جمع اعداد تمام ۶ ردیف برابر ۲ برابر مجموع تمام اعداد ۱ تا ۱۲ می‌باشد. اگر حاصل جمع هر ردیف را a فرض کنیم، خواهیم داشت:



(مجتبی فغانی ابری)

$$6a = (1+2+3+\dots+10+11+12) \times 2$$

$$\Rightarrow 6a = \frac{12 \times 13}{2} \times 2 = 12 \times 13 \Rightarrow a = \frac{12 \times 13}{6} = 26$$

و البته این کار مطابق شکل روبه‌رو شدنی است.

۴۴. گزینه ۱؛ در حل این مسأله باید به عددهای ۱۱، ۷ و ۱۳ توجه داشت. اگر تعداد خانه‌ها ۱۳ تا یا بیش‌تر باشد و پلاک خانه کم‌تر از ۱۳ باشد، حاصل ضرب اعداد پلاک‌های بعدی بر ۱۳ بخش‌پذیر می‌شود در حالی که حاصل ضرب پلاک‌های قبلی بخش‌پذیر نیست. اگر پلاک خانه نقیبه ۱۳ یا بیش‌تر باشد حاصل ضرب قبلی‌ها بسیار بیش‌تر از اعداد بعدی می‌شود. پس تعداد خانه‌ها کم‌تر از ۱۳ است. اگر تعداد خانه‌ها ۱۱ یا ۱۲ باشد و پلاک خانه کم‌تر از ۱۱ باشد، حاصل ضرب اعداد پلاک‌های بعدی بر ۱۱ بخش‌پذیر می‌شود در حالی که حاصل ضرب پلاک‌های قبلی نیست. اگر پلاک خانه نقیبه ۱۱ باشد حاصل ضرب اعداد ۱ الی ۱۰ بسیار بیش‌تر از ۱۲ می‌شود. حال اگر تعداد خانه‌ها بیش‌تر از ۷ باشد، پلاک خانه باید حتماً ۷ باشد زیرا اگر نباشد حاصل ضرب یکی بر ۷ بخش‌پذیر می‌شود و دیگری نمی‌شود.

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720 \quad 9 \times 8 \times 10 = 720$$

پس در حالتی که تعداد خانه‌ها ۱۰ باشد و پلاک خانه ۷ باشد، مسأله جواب دارد. اما اگر تعداد خانه‌ها از ۷ کم‌تر باشد، با کمی بررسی و آزمون و خطا مشخص می‌شود که در این حالت مسأله جواب ندارد.

۴۵. گزینه ۲؛ عدد p باید مقسوم‌علیه‌ی از عدد ۲۰۰۰ باشد، پس $p = 2$ است یا $p = 5$. اگر $p = 5$ آن‌گاه داریم:

$$5 \times (qrs - 1) = 2000 \Rightarrow qrs - 1 = 400 \Rightarrow qrs = 401$$

اما عدد ۴۰۱ عددی اول است، پس به صورت حاصل ضرب سه عدد اول نمی‌تواند باشد. پس $p = 2$ می‌شود:

$$2 \times (qrs - 1) = 2000 \Rightarrow qrs - 1 = 1000 \Rightarrow qrs = 1001$$

$$1001 = 11 \times 91 = 11 \times 7 \times 13 \Rightarrow \{q, r, s\} = \{1, 7, 13\} \Rightarrow q + r + s + p = 11 + 7 + 13 + 2 = 33$$

(کیان کریمی فراسانی)

۴۶. گزینه ۳؛ با توجه به این که درون این جعبه ۱۰۱ کارت وجود دارد و روی این کارت‌ها اعداد ۱ تا ۱۰۱ نوشته شده است، می‌توانیم آن‌ها را به دو دسته اعداد فرد و زوج تقسیم‌بندی نماییم. مجموعه اعداد زوج $\{2, 4, 6, \dots, 100\}$ که دارای ۵۰ عضو می‌باشد و مجموعه اعداد فرد $\{1, 3, 5, \dots, 101\}$ که دارای ۵۱ عضو می‌باشد. حال به سراغ حل سوال می‌رویم. ضرب اعداد بیرون آمده را به صورت زیر نمایش می‌دهیم.

$$(101 - 1) \dots (2 - 2) (1 - 1) \text{ (کارت ۱)}$$

در صورتی که حاصل یکی از پرانتزها، عددی زوج باشد، عدد به دست آمده نهایی نیز زوج می‌باشد. اگر بخواهد عدد نهایی حاصل فرد باشد باید حاصل تمام پرانتزها، اعداد فرد باشد. بنابراین برای اعداد فرد باید عدد کارت بیرون کشیده، زوج باشد و برای اعداد زوج، عدد کارت بیرون کشیده، فرد باشد. پرانتزها را جابه‌جا کرده و دوباره به صورت زیر می‌نویسیم:

$$[(100 - 100) \dots (4 - 4) (2 - 2)] \times [(101 - 101) \dots (3 - 3) (1 - 1)]$$

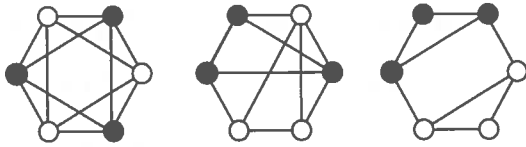
قسمت اول را مورد بررسی بیش‌تر قرار می‌دهیم:

$$(101 - 101) \dots (5 - 5) (3 - 3) (1 - 1)$$

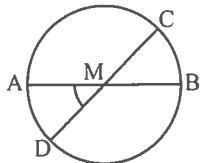
تعداد این پرانتزها ۵۱ عدد می‌باشد. می‌دانیم برای این که حاصل ضرب همه این پرانتزها فرد شود، باید اعداد کارت‌ها با شماره ۱ و ۳ و ۵ و ... و ۱۰۱ همگی زوج باشند یعنی ۵۱ عدد زوج که این امکان ندارد. زیرا در کل ۵۰ عدد زوج ۲ و ۴ و ... و ۱۰۰ وجود دارد و این در صورتی است که ما ۵۱ عدد زوج نیاز داریم، پس در نتیجه امکان ندارد حاصل ضرب کل، فرد شود و حتماً زوج می‌باشد.

۴۷. گزینه ۵؛ موارد را بررسی می‌کنیم:

الف) یکی از ۳ حالت زیر رخ می‌دهد که در هر ۳ مورد به وضوح دو مثلث با هم برابرند:



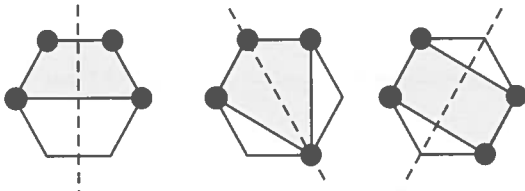
ب) اگر در یک دایره، دو وتر AB و CD هم‌دیگر را در نقطه M قطع کنند، زاویه M به صورت زیر به دست می‌آید:



$$\hat{M} = \frac{\widehat{AD} + \widehat{BC}}{2} \Rightarrow \text{میانگین دو کمان}$$

چون در یک شش ضلعی منتظم زاویه تمامی کمان‌ها، مضربی از 60° است، پس به میانگین هر دوتایی از آن‌ها بر 30° بخش پذیر است.

پ) یکی از ۳ حالت زیر رخ می‌دهد، که در هر ۳ حالت محور تقارن مشخص شده است:



(کیان کریمی فراسانی)

۴۸. گزینه ۱؛ به رابطه زیر دقت کنید:

$$(x + y) \times (p + q) \times (a + b) = xpa + xpb + xqa + xqb + yba + ypb + yqa + yqb$$

به سادگی می‌توان فهمید مجموع این ۴۸ عدد به صورت زیر است. (مثلاً حاصل $3 \times 5 \times 11$ مشخص شده است.):

$$(1 + 2 + 3 + 4) \times (8 + 7 + 6 + 5) \times (11 + 10 + 9)$$

$$(1 + 2 + 3 + 4) \times (8 + 7 + 6 + 5) \times (11 + 10 + 9) = 10 \times 26 \times 30 = 7800$$

(کیان کریمی فراسانی)

۴۹. گزینه ۴؛ این مسئله بسیار زیبا می‌باشد. توجه کنید اگر به دنبال این باشیم که خودمان را درگیر شکل سوال نماییم، دچار مشکل می‌شویم و شکل مناسب را به سختی می‌توان رسم نمود و احياناً اگر هم امکان پذیر باشد، زمان زیادی را لازم دارد. ما بدون این که خودمان را درگیر چگونگی رسم شکل کنیم، فرض می‌کنیم این کار انجام شود، کل شکل به مثلث‌های مختلفی افراز شده باشد. (افراز بدان معنا می‌باشد که مثلث‌ها به جز در نقاط رئوس و اضلاع، هیچ نقطه مشترک دیگری ندارد و از طرفی اجتماع کل این مثلث‌ها شکل 100° ضلعی ما را کامل می‌پوشاند.) در این صورت می‌توان تعداد مثلث‌ها را n فرض کرد. حال اگر مجموع زوایای این مثلث‌ها را به دست آوریم، با توجه به این که مجموع زوایای هر مثلث 180° می‌باشد و ما n مثلث داریم، مجموع کل زوایا برابر $n \times 180^\circ$ می‌باشد. حال از طریق دیگری مجموع زوایا را به دست می‌آوریم.

می‌دانیم مجموع زوایای یک 100° ضلعی برابر $(100 - 2) \times 180^\circ$ می‌باشد و از طرفی 30° نقطه داخلی هم وجود دارد که مجموع زوایای شامل این نقاط در داخل 100° ضلعی برابر 360° می‌باشد، با توجه به توضیحات بالا، مجموع کل زوایای موجود در 100° ضلعی برابر است با:

$$(100 - 2) \times 180^\circ + 30 \times 360^\circ$$

و از طرفی مجموع این زوایا برابر بود با $n \times 180^\circ$.

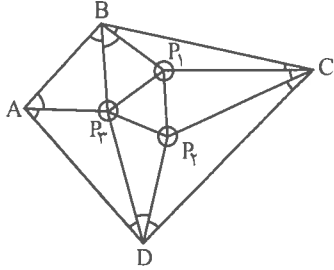
$$\Rightarrow n \times 180^\circ = (100 - 2) \times 180^\circ + 30^\circ \times 360^\circ$$

$$\Rightarrow n \times 180^\circ = 98 \times 180^\circ + 30^\circ \times 360^\circ \Rightarrow n \times 180^\circ = 180^\circ \times [98 + 30 \times 2]$$

$$n \times 180^\circ = 180^\circ \times 158 \Rightarrow n = 158$$

پس تعداد کل مثلث‌ها باید ۱۵۸ عدد باشد تا تساوی برقرار باشد. برای این که راه‌حل بهتر فهمیده شود یک مثال می‌زنیم:

تعداد کل مثلث‌ها برابر است با ۸ عدد و مجموع زوایای داخلی هر مثلث برابر است با 180° درجه، پس مجموع تمام زوایا برابر است با:



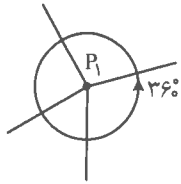
$$8 \times 180^\circ = 1440^\circ$$

حال مجموع زوایا را از روش دوم به دست می‌آوریم، می‌دانیم مجموع زوایای داخلی چهارضلعی ABCD برابر 360° درجه می‌باشد. یعنی

مجموع زاویه‌های A, B, C, D برابر 360° درجه می‌باشد و از طرفی مجموع تمام زوایای اطراف نقطه P_1 که شامل این نقطه باشند برابر

360° درجه می‌باشد و به همین ترتیب مجموع زوایای شامل P_2, P_3 نیز 360° درجه می‌باشد.

به عبارتی مجموع تمامی زوایا از روش دوم برابر است با:



$$3 \times 360^\circ + 360^\circ = 1440^\circ$$

(هر تفرقی فکاهی ابری)

که باز هم همان 1440° درجه می‌باشد که از روش اول محاسبه گردید.



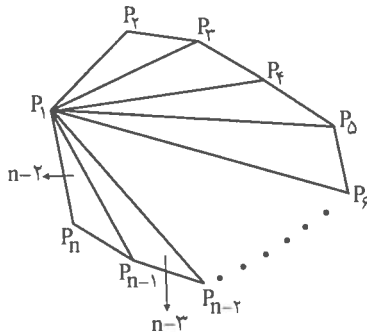
مطالعه‌ی آزاد

مجموع زوایای هر n ضلعی برابر $(n - 2) \times 180^\circ$ می‌باشد، زیرا هر n ضلعی را می‌توان به $n - 2$ مثلث دیگر تقسیم کرد.

به این روش عمل می‌کنیم که از یک رأس به تمامی رئوس دیگر یک خط مستقیم وصل می‌کنیم (قطرها را رسم می‌کنیم).

همان‌طور که در شکل مشخص است، تعداد مثلث‌ها برابر است با $n - 2$ مثلث و از طرفی مجموع زوایای هر مثلث برابر است با

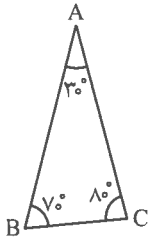
180° که جمع کل زوایا می‌شود:



$$(n - 2) \times 180^\circ$$

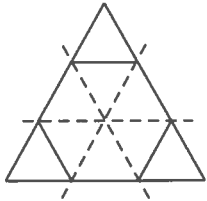
۵۰. گزینه ۴؛ مربع دارای چهار محور تقارن است. خطوطی که از رئوس مقابل می‌گذرند و خطوطی که از وسط اضلاع مقابل می‌گذرند. اما مربع‌های داده شده به ترتیب از چپ به راست دارای ۴، ۲، ۲، ۴، ۲ و ۲ محور تقارن می‌باشند.
(مبیر منشوری)

۵۱. گزینه ۴؛ چنین مثلثی دارای زاویه سوم 80° است. $(180^\circ - (30^\circ + 70^\circ)) = 80^\circ$ چون زوایای مثلث، دوجه‌دو، متفاوتند، پس اضلاع مثلث نیز دوجه‌دو متفاوتند. پس در سه حالتی که $AB = 7$ ، $AC = 7$ یا $BC = 7$ باشد، ۳ مثلث متفاوت رسم می‌شود. این‌ها تنها مثلث‌هایی هستند که قابل رسم می‌باشند زیرا با داشتن زوایای مثلث و یک ضلع آن مثلث به طور یکتا رسم می‌شود.



(مقیبى فمأمى ابرى)

۵۲. گزینه ۳؛ چون شش ضلعی منتظم است پس هر زاویه داخلی آن 120° است و به ۶ مثلث متساوی‌الاضلاع قابل تقسیم است. با توجه به خطوط رسم شده متوجه می‌شویم که مثلث بزرگ از ۹ مثلث کوچک‌تر تشکیل شده است.



$$\text{مساحت مثلث کوچک} = \frac{\text{مساحت مثلث بزرگ}}{9} = \frac{60}{9}$$

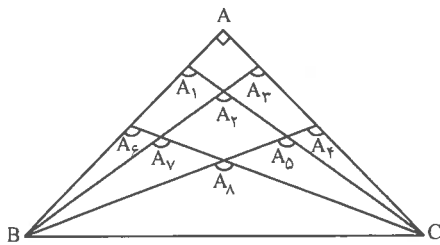
$$\text{سانتی‌متر مربع} = 4 = \frac{360}{9} = 6 \times \frac{60}{9}$$

مساحت شش ضلعی

(مبیر منشوری)

۵۳. گزینه ۳؛ به وضوح مثلث‌های BCD ، CDE ، ACG ، DEF و EIH با مثلث ABC برابر هستند. دقت کنید مثلث ABC متساوی‌الساقین نیست ولی مثلث CEH متساوی‌الساقین است، پس نمی‌توانند برابر باشند.
(آریان کریمی فراسانی)

۵۴. گزینه ۴؛ با توجه به شکل زیر، تمامی مثلث‌هایی که رئوس آن‌ها A_1 تا A_8 می‌باشند، مثلث‌های منفرجه‌الزاویه می‌باشند.



رأس A_8 با رئوس (B, C) ← ۱ مثلث

رأس A_7 با رئوس (B, C) و (B, A_8) ← ۲ مثلث

رأس A_5 با رئوس (B, C) و (A_8, C) ← ۲ مثلث

رأس A_4 با رئوس (B, C) ، (A_8, C) و (A_5, C) ← ۳ مثلث

رأس A_6 با رئوس (B, C) ، (A_8, B) و (B, A_7) ← ۳ مثلث

رأس A_7 با رئوس (B, C) ، (A_5, B) و (A_7, C) ← ۳ مثلث

رأس A_3 با رئوس (B, C) ، (A_4, B) و (A_7, C) ← ۴ مثلث

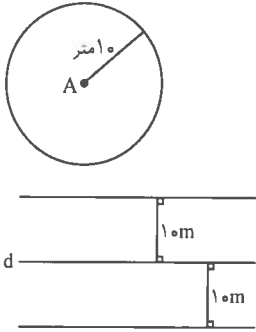
رأس A_1 با رئوس (B, C) ، (A_6, C) ، (B, A_5) و (B, A_7) ← ۴ مثلث

بنابراین تعداد کل مثلث‌های منفرجه‌الزاویه برابر ۲۲ مثلث می‌باشد.

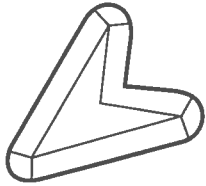
$$1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 3 + 4 + 4 = 22$$

(مهرتفنى فمأمى ابرى)

۵۵. گزینه ۵؛ با توجه به شکل زیر تمام نقاطی که از یک نقطه خاص مانند A بیش از ۱۰ متر فاصله دارند نقاط خارج دایره می‌باشند (دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۱۰ متر)



نقاطی که از یک خط ثابت مانند d بیش از ۱۰ متر فاصله دارند، نقاط خارج از دو خط موازی خط d و به فاصله ۱۰ متر از آن می‌باشند.



(مرتفی فهایم‌پدی)

با توجه به توضیحات بالا مشخص است که منطقه حفاظت شده به شکل زیر می‌باشد که مرز منطقه حفاظت شده با خطوط پر رنگ‌تر نشان داده شده است.

(توجه شود اگر طبق فرض طول AB بیش‌تر از ۲۰ نبود گزینه ۴ هم امکان‌پذیر می‌شد.)

۵۶. گزینه ۲؛ در حل مسأله باید به قضیهٔ همار توجه داشت که یکی از نتایج آن این است که در هر مثلث طول هر ضلع از مجموع طول دو ضلع دیگر کم‌تر است. حال گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه ۱: $\triangle ACE \Rightarrow AC + CE = 70 + 40 = 110 < 120 = AE$ غ.ق.ق

گزینه ۲: در هر سه مثلث ABC، CED و ACE رابطهٔ همار برقرار است.

گزینه ۳: $\triangle ABC \Rightarrow AB + BC = 25 + 28 = 53 < 55 = AC$ غ.ق.ق

گزینه ۴: $\triangle ACE \Rightarrow AC + CE = 50 + 70 = 120 = AE$ غ.ق.ق

گزینه ۵: $\triangle CDE \Rightarrow CD + DE = 33 + 43 = 76 < 80 = CE$ غ.ق.ق

(کیان کریمی‌فراسانی)

۵۷. گزینه ۴؛ به عدد ۱۲۵ دقت کنید، $5^3 = 125$ از این جا متوجه می‌شویم $5 = \text{شکل پنتاگون}$ و شکل شکل شش‌گانه برابر با ۳ یا ۴ یا ۶ است، چون ممکن است کسر ساده شده باشد و به صورت $\frac{3}{125}$ درآمده باشد. پس حاصل کسر یکی از سه کسر $\frac{3}{5}$ یا $\frac{15}{54}$ یا $\frac{375}{56}$ بوده است و این

یعنی این که $\square + \triangle + \diamond = \text{برابر با یکی از سه عدد ۳ یا ۱۵ یا ۳۷۵ باشد که در این جا ۳ حالت داریم:}$

۳ ← یعنی $\square, \triangle, \diamond$ برابر با اعداد ۱، ۲، ۴ و ۶ هستند که به وضوح عبارت $\square + \triangle + \diamond$ با این اعداد برابر با ۳ نمی‌شود.

۱۵ ← یعنی $\square, \triangle, \diamond$ برابر با اعداد ۱، ۲، ۳، ۶ هستند که حاصل $3^2 + 6^1$ برابر با ۱۵ می‌شود.

۳۷۵ ← یعنی $\square, \triangle, \diamond$ و برابر با اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ هستند که به وضوح عبارت $\square + \triangle + \diamond$ برابر با ۳۷۵ نمی‌شود

چون ۳۷۵ نسبتاً بزرگ است.

(کیان کریمی‌فراسانی)

۵۸. گزینه ۴؛ عدد $(n-1)!$ تنها وقتی بر n بخش پذیر نیست که n عددی اول یا $n=4$ باشد.

اثبات: اگر n مرکب باشد، ۲ حالت امکان دارد:

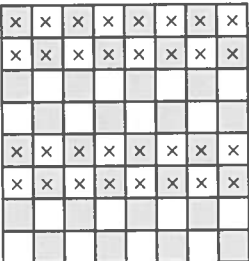
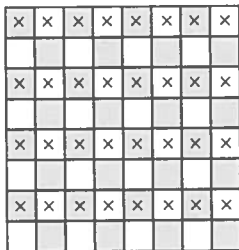
(I) $n = a \times b$ که $a \leq n-1$ و $b \leq n-1$ پس بین عامل‌های $(n-1)!$ می‌توان a و b را پیدا کرد.

(II) اگر $n = p^2$ که $p > 2$ ، آن‌گاه $2p - 1 < p^2 - 1 = n - 1$. پس اعداد p و $2p$ را می‌توان در بین عامل‌های $(n-1)!$ پیدا کرد.

(کیهان فیسته)

پس عدد ۴ و تمام اعداد اول کوچک‌تر از ۴۰ جواب مسأله است. جواب صحیح گزینه ۴ است.

۵۹. گزینه ۴؛ اگر قورباغه‌ها را در جاهای مشخص شده قرار دهیم، نمی‌توانند یکدیگر را تهدید کنند.



(همیدرضا بیات)

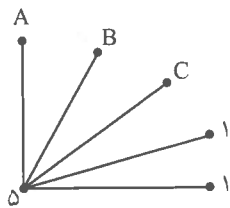
اگر کانگوروها را در جاهای مشخص شده قرار دهیم، نمی‌توانند یکدیگر را تهدید کنند.

(البته در هر مورد باید اثبات کنیم که چرا پاسخ بیش‌تر از ۳۲ نیست!)

۶۰. گزینه ۵؛ برای حل این سؤال بهتر است گزینه‌ها را یکی یکی بررسی کنیم.

گزینه ۱: درست نمی‌باشد چون اگر شخصی باشد که با ۵ نفر دست داده باشد، بنابراین با تمامی افراد دیگر دست داده است. در نتیجه شخصی نیست که با کسی دست نداده باشد، پس عدد صفر نباید این گزینه باشد.

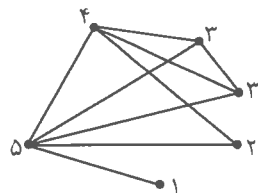
گزینه‌های ۲ و ۳: درست نمی‌باشد، توجه کنید که هر دست دادن دو بار شمرده می‌شود، زیرا هنگامی که نفر اول با نفر دوم دست داده است نفر دوم نیز با نفر اول دست داده است، بنابراین مجموع دست دادن‌های کل افراد عددی زوج می‌شود، ولی مجموع اعداد گزینه‌های ۲ و ۳ به ترتیب برابر ۱۷ و ۹ است.



گزینه ۴: درست نمی‌باشد. در شکل مقابل هر شخص را با یک نقطه نشان می‌دهیم و تعداد دست دادن‌ها را کنار هر رأس می‌نویسیم و هم‌چنین هر دست دادن را با یک پاره‌خط نمایش می‌دهیم در اعداد این گزینه شخصی وجود دارد که با ۵ نفر دست داده است که در شکل نشان داده شده است. حالا در بین این اشخاص دو شخص هستند که فقط یک دست داده‌اند که باز هم نشان داده شده است. حالا در بین ۳ نفر دیگر شخصی وجود دارد

که با ۴ نفر دست داده است که آن شخص می‌تواند A، B، و C باشد و مطمئناً با نفراتی که یک‌بار دست داده‌اند نمی‌توانند دست بدهند،

پس اگر این فرد با بقیه افراد هم دست بدهد، نمی‌تواند با ۴ نفر دست بدهد، چون با دو نفر دست نمی‌دهد.



(مرتضی فغانی ابری)

گزینه ۵: درست می‌باشد. نمودار دست دادن‌های این گزینه به صورت روبه‌رو می‌باشد.

۶۱. گزینه ۴؛ این دوازده عدد را به ترتیب زیر جمع می‌کنیم:

$$(a - 5) + (a - 4) + (a - 3) + (a - 2) + (a - 1) + a + (a + 1) + (a + 2) + (a + 3) + (a + 4) + (a + 5) + (a + 6)$$

$$= 12a + 6 \Rightarrow 12a + 6 = 6 \Rightarrow 12a = 0 \Rightarrow a = 0$$

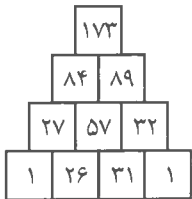
$$\text{عدد کوچک‌ترین این دوازده عدد} = a - 5 = 0 - 5 = -5$$

(مبیر منشوری)

۶۲. گزینه ۴؛ در مثلث ABB' ، AH هم‌ارتفاع می‌باشد و هم‌نیمساز. بنابراین مثلث ABB' متساوی‌الساقین است و $AB = AB'$ می‌باشد. بنابراین:

$$B'C = AC - AB \Rightarrow B'C = 18 - 7 \Rightarrow B'C = 11$$

(مرتضی فغانی ابری)



(کیان کریمی فراسانی)

۶۳. گزینه ۲؛ چهار عدد داخل چهار آجر پایینی را در نظر بگیرید. بدیهی است که جمع آن‌ها برابر با $27 + 32$ است. هم‌چنین با کمی فکر متوجه خواهید شد برای بزرگ‌تر شدن مقدار (\odot) ، تأثیر دو عدد وسطی از دو عدد کناری بیش‌تر است. پس باید تا آن‌جا که ممکن است، دو عدد کناری را کوچک فرض کرد تا دو عدد وسطی بزرگ‌تر شوند:

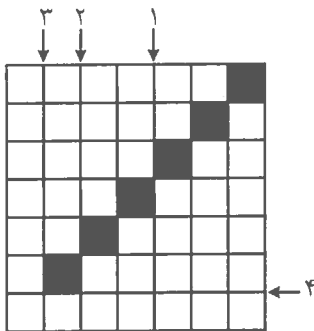
۶۴. گزینه ۴؛ چون میانگین این ده عدد برابر ۱۰ است، لذا حاصل جمع این ده عدد برابر ۱۰۰ خواهد بود. چون می‌خواهیم یکی از آن‌ها بیش‌ترین باشد، لذا ۹ عدد از این تعداد عدد را به ترتیب برابر ۱ تا ۹ انتخاب می‌کنیم تا عدد دهم به دست آید.

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + n = 100 \Rightarrow 45 + n = 100 \Rightarrow n = 100 - 45 \Rightarrow n = 55$$

(مبیر منشوری)

۶۵. گزینه ۴؛ هر دو قسمت رنگ شده را به گونه‌ای کنار هم قرار دهید که یک مستطیل 10×10 تشکیل شود. بدین ترتیب $10 \times 10 = 2 \times 100 \times 10 \times 10$ مساحت قسمت‌ها شور خورده است.

(سارا ارشادمش)



(سارا ارشادمش)

۶۶. گزینه ۳؛ ۶ خانه‌ی رنگی داریم پس با یک بار تا کردن حداکثر ۱۲ خانه رنگی دیده می‌شود و با دو بار تا کردن حداکثر ۲۴ خانه، ۳ بار تا کردن نیز حداکثر باعث رنگی دیده شدن ۴۸ خانه می‌شود، در حالی که در شکل ۴۹ خانه داریم. حال کافی است نحوه‌ی از تا کردن را پیدا کنیم که با ۴ بار تا، کل شکل رنگی دیده شود.

اگر به ترتیب از روی خطوط نشان داده شده تا کنیم، می‌بینیم که کل شکل رنگی دیده خواهد شد.

۶۷. گزینه ۲؛ عددی که کوچک‌ترین مضرب مشترک اعداد ۱ الی ۸ باشد، شماره لانه‌ای است که زودتر از همه پر می‌شود، یعنی پاسخ برابر است با:

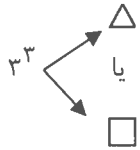
$$8 \square 7 \square 6 \square 5 \square 4 \square 3 \square 2 = 8 \times 7 \times 5 \times 3 = 840$$

(مجتبی فغانی ابری)

۶۸. گزینه ۱؛ از آن جایی که می‌خواهیم حاصل $\square \times \triangle^{20} \times \circ \times \star^{10}$ کم‌ترین مقدار ممکن باشد، باید سعی کنیم هر یک از عوامل $5^3, 5^2, 2^4, 3^3, 2^2$ تنها به شکلی اختصاص یابد که در هر ردیف و ستونی که آن عامل ظاهر شده، وجود داشته باشد، همان‌طور که می‌بینیم؛ مشترک در همهٔ ردیف‌ها و ستون‌هایی که 5^3 ظاهر شده \star است. به همین ترتیب ادامه می‌دهیم و به دست می‌آوریم:

$$5^3 \rightarrow \star$$

$$2^4 \times 3^5 \rightarrow \circ$$



$$2^2 \rightarrow \star$$

3^3 به یکی از دو شکل \triangle و \square اختصاص می‌یابد از آن جایی که می‌خواهیم حاصل آن عبارت کم شود، پاسخ گزینه ۱ درست خواهد شد.

(سارا ارشادمش)

۶۹. گزینه ۴؛ تعداد کل افراد این شجره‌نامه برابر است با:

$$A = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{99}$$

اگر به عبارت A یک 2^0 دیگر اضافه کنیم، خواهیم داشت: (چرا؟)

$$\left. \begin{array}{c} 2^0 + 2^0 \\ 2^1 + 2^1 \\ 2^2 + 2^2 \\ 2^3 + 2^3 \\ \dots \\ 2^{99} \end{array} \right\} \begin{array}{c} 2^1 \\ 2^2 \\ 2^3 \\ \dots \\ 2^{100} \end{array}$$

به عبارتی $A+1$ برابر 2^{100} می‌باشد. با توجه به این که 2^{100} عدد خیلی بزرگی است، تقریباً A برابر با 2^{100} می‌باشد بنابراین اگر تا

نسل ۹۹ام پیش رویم تعداد کل افراد شجره‌نامه تقریباً برابر است با 2^{99} می‌باشد که نصف 2^{100} است (همان $\frac{A}{2}$ است).

(مرتضی فهامی‌ابری)

۷۰. گزینه ۲؛ الف) عدد بزرگ‌تر را a و عدد کوچک‌تر را b می‌نامیم. روشن است که از تقسیم a بر b به باقی‌ماندهٔ ۱۱۱۱ می‌رسیم

یعنی $a = bq + 1111$. این تساوی را به صورت $a - bq = 1111$ می‌نویسیم. هر مقسوم‌علیهٔ از a و b باید مقسوم‌علیهٔ ۱۱۱۱ هم باشد

ولی عدد ۱۱۱۱ مقسوم‌علیهٔ هر دو عدد a و b است. پس ب. م. م آن‌ها خواهد بود.

ب) فرض کنیم عدد موردنظر n رقمی باشد. چون عدد بر $\underbrace{33\dots33}_{100 \text{ رقم}}$ قابل قسمت است، پس باید بر ۳ و $\underbrace{11\dots11}_{100 \text{ رقم}}$ قابل قسمت باشد. پس از

یک طرف n مضربی از ۳ است و از طرف دیگر، n باید مضربی از ۱۰۰ باشد (بنا بر بخش الف) کوچک‌ترین عدد با این شرایط، $n = 300$

(کیوان فیهسته)

است. یعنی عدد موردنظر ۳۰۰ رقمی است.

۷۱. گزینه ۱؛

$$\frac{9 \times 4 + 3 \times 6}{12} = \frac{36 + 18}{12} = 4/5 \text{ ساعت}$$

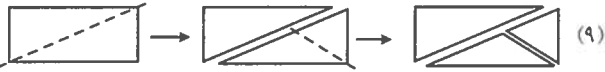
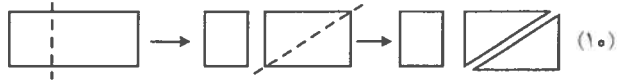
توجه کنید که این محاسبات تقریبی است. چون تعداد روزهای همه‌ی ماه‌های سال با هم برابر نیست اما در این محاسبات برابر فرض شده و

(زهرا پندی)

کسر مربوط به پاسخ سوال، ساده شده است.

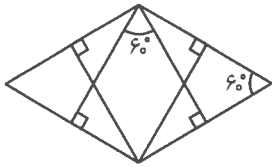


۷۲. گزینه ۵؛ با رسم شکل و تقسیمات به جواب می‌رسیم. به همین ترتیب اگر حالت‌های دیگر را نیز رسم کنید، تعداد ضلع‌های شکل‌های به وجود آمده یکی از این ۴ عدد خواهد شد.



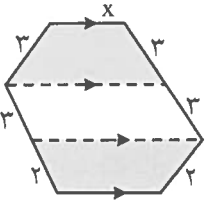
(مویز منشوری)

۷۳. گزینه ۴؛ یک لوزی با زاویه‌ی تند 60° ؛ از آن‌جا که اضلاع روبه‌رو در لوزی با یکدیگر موازی‌اند، خط عمود بر هر ضلع بر ضلع روبه‌رویش نیز عمود است (قضیه موازی و مورب). از آن‌جا که خطوط عمود بر یک خط با یکدیگر موازی‌اند، پس عمودمنصف‌های اضلاع روبه‌رو با یکدیگر موازی‌اند لذا چهارضلعی تشکیل شده متوازی‌الاضلاع است، اما به دلیل تقارن موجود در لوزی، اضلاع چهارضلعی تشکیل شده نیز با یکدیگر برابرند پس این چهارضلعی در واقع لوزی است و زاویه‌ی تند آن 60° است.

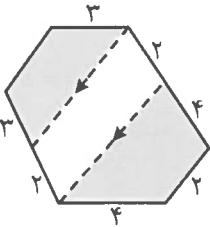


(مجتبی فامی ابری)

۷۴. گزینه ۱؛ به شکل زیر دقت کنید:



به وضوح، شکل‌های رنگ شده، دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین هستند. پس $y = 5$. حال به شکل زیر دقت کنید:



باز هم شکل‌های رنگ شده، دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین هستند و شکل رنگ نشده متوازی‌الاضلاع است. پس $x = 3$.

(مرتضی فامی ابری)

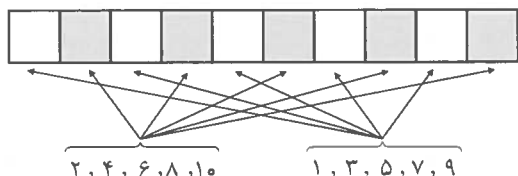
۷۵. گزینه ۲؛ هر عدد مجذور کامل تنها به یکی از ارقام ۰، ۱، ۴، ۹، ۶، ۵ ختم می‌شود. از طرفی، باقی‌مانده هر عدد مجذور کامل بر ۴ مساوی ۰ یا ۱ است. پس دو رقم سمت راست ۱۱، ۹۹، ۶۶ یا ۵۵ نمی‌تواند باشد؛ چون باقی‌مانده‌ی آن‌ها بر ۴، ۲ یا ۳ است. پس این عدد صرفاً به ۰۰ یا ۴۴ ختم شده است.

(کیهان فبسته)

۷۶. گزینه ۱؛ حل این مسأله نیازمند کمی خلاقیت است. به شکل زیر دقت کنید

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰

همان‌طور که دیدید اعداد زوج در ردیف‌های سیاه و اعداد فرد در ردیف‌های سفید قرار دارند. حال اگر ۵ کارت کنار هم را برداریم و به عکس بچینیم باز هم اعداد زوج سیاه و اعداد فرد سفید خواهند بود و همواره این روند ثابت و بدون تغییر خواهد ماند.



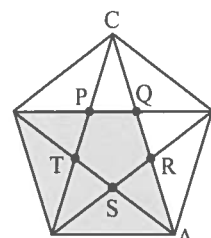
در تمامی گزینه‌ها غیر از گزینه ۱ این موضوع رعایت نشده است. اما این که چگونه می‌توان به گزینه ۱ رسید به عهده خواننده می‌باشد.

(کیان کریمی فراسانی)

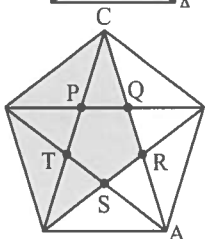
۷۷. گزینه ۴؛ به شکل روبه‌رو دقت کنید:

به وضوح چهارضلعی رنگ شده متوازی الاضلاع است. پس: $AQ = a$

و همین‌طور در شکل بعدی چهارضلعی رنگ شده متوازی الاضلاع است. پس: $RC = a$ حال داریم:



$$QR = AQ + RC - AC = 2a - b$$



(کیان کریمی فراسانی)

۷۸. گزینه ۵؛ برای حل این سوال از دو روش می‌توان استفاده کرد:

روش اول: با توجه به اینکه حداقل تعداد لامپ‌های روشن شده می‌تواند صفر لامپ و حداکثر تعداد لامپ‌های روشن شده می‌تواند ۳۳ لامپ باشد و برای این مقادیر می‌توان هر کدام از حالات را بررسی کرد. البته این روش کمی وقت‌گیر است.

روش دوم: این یک راه‌حل خوب و زیبا است. با اتصال هر کدام از کلیدها یک دسته از لامپ‌ها روشن می‌شوند که تعداد لامپ‌های هر دسته توانی از ۲ می‌باشند.

رقم $A \rightarrow ۱۶$ لامپ \rightarrow کلید ۱

رقم $B \rightarrow ۸$ لامپ \rightarrow کلید ۲

رقم $C \rightarrow ۴$ لامپ \rightarrow کلید ۳

رقم $D \rightarrow ۲$ لامپ \rightarrow کلید ۴

رقم $E \rightarrow ۲$ لامپ \rightarrow کلید ۵

رقم $F \rightarrow ۱$ لامپ \rightarrow کلید ۶

و در عمل هر حالت وصل یا قطع بودن لامپ‌ها را می‌توان با جمع دو عدد که با ارقام A تا F ساخته شده‌اند، متناظر کرد. قطع بودن کلیدها را با صفر بودن حروف و وصل بودن کلیدها را با ۱ بودن حروف نمایش می‌دهیم. بنابراین تعداد لامپ‌های روشن در هر حالت برابر است با:

$$\overline{(ABCDEF)}_۲ + \overline{(E0)}_۲$$

$$(0000)_2 + (00)_2 = 0$$

$$(1111)_2 + (10)_2 = 33$$

می‌دانیم که $(\overline{E0})_2 + (\overline{ABCD})_2 = n$ و از طرفی $(\overline{E0})_2$ می‌تواند ۲ یا صفر باشد. اگر $E = 1$ باشد، برابر ۲ و اگر $E = 0$ باشد، برابر ۱ می‌گردد.

اگر $n = 33$ باشد: تمامی کلیدها وصل باشند $\rightarrow (1111)_2 + (10)_2 = (\overline{ABCD})_2 + (\overline{E0})_2 = 33$

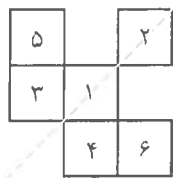
اگر $n = 32$ باشد: تمامی کلیدها به جز F وصل باشند $\rightarrow (1110)_2 + (10)_2 = (\overline{ABCD})_2 + (\overline{E0})_2 = 32$

اگر $n = 31$ باشد:

$$n = 31 \Rightarrow n = \begin{cases} \text{تمامی کلیدها به جز D وصل باشند} \rightarrow (11101)_2 + (10)_2 \\ \text{تمامی کلیدها به جز E وصل باشند} \rightarrow (11111)_2 + (00)_2 \end{cases}$$

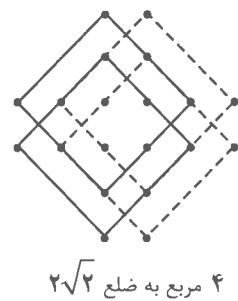
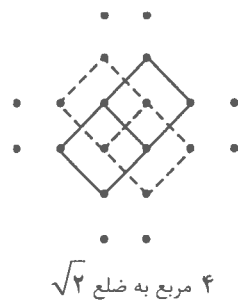
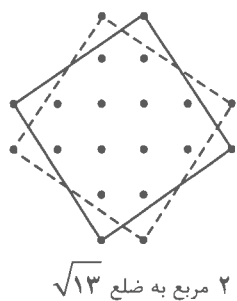
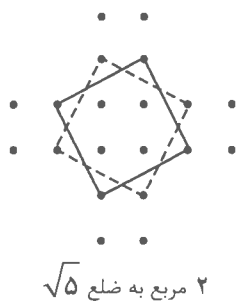
به همین ترتیب می‌توان نتیجه گرفت به ازای n هایی که E هم می‌تواند صفر و هم یک باشد، بیش از ۱ جواب وجود دارد ولی اگر برای E فقط یک حالت امکان‌پذیر باشد به ازای آن n فقط یک جواب وجود دارد و با کمی بررسی متوجه می‌شویم به ازای n های برابر با ۳۳ و ۳۲ و ۱ و ۰ فقط یک حالت برای $(\overline{E0})_2$ وجود دارد و به همین ترتیب برای $(\overline{ABCD})_2$ نیز فقط یک حالت وجود خواهد داشت. در نتیجه برای کلیدها نیز فقط یک حالت وجود دارد ولی به ازای بقیه‌ی n ها یعنی از $n = 2$ تا $n = 31$ برای $(\overline{E0})_2$ بیش از ۱ حالت وجود دارد و به همین ترتیب $(\overline{ABCD})_2$ نیز بیش از یک حالت وجود خواهد داشت. به عبارتی به ازای مقادیر $n = 2$ تا $n = 31$ بیش از یک حالت برای قطع و وصل کردن کلیدها وجود دارد. در نتیجه برای ۳۰ مقدار برای n بیش از یک حالت برای قطع و وصل کردن کلیدها وجود دارد. (مرثقی ففامی‌ایدی)

۷۹. گزینه ۵؛ با توجه به محور تقارن شکل قبل از هاشور خوردن، معلوم می‌شود خانه‌ها باید طوری هاشور زده شوند که تقارن شکل از بین نرود. لذا باید خانه ۱ یا ۲ یا (۳ و ۴) یا (۵ و ۶) هاشور بخورند. در این صورت تعداد حالت‌هایی که می‌توان خانه‌ها را هاشور زد از تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه ۴ عضوی یکی کم‌تر است. بنابراین برابر $2^4 - 1 = 15$ می‌باشد.



(مبیر منشوری)

۸۰. گزینه ۴؛ ۹ مربع کوچک به ضلع ۱ وجود دارد.



(همیشه بیات)

پس در مجموع ۲۱ مربع می‌توان رسم کرد.

۸۳. گزینه ۳؛ به وضوح کل تعداد حالات چیدن $5040 = (1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7)$ است. در بین این حالات، به دلیل تقارن بین ۷ کشتی گیر هر کدام در $\frac{1}{7}$ آن‌ها قهرمان می‌شود:

$$\frac{1}{7} \times 5040 = 720$$

(کیان کریمی، فراسانی)

۸۴. گزینه ۲؛ در یک جدول ضرب 30×30 ، اعداد فرد زمانی ایجاد می‌شوند که دو عدد فرد در هم ضرب شوند و از طرفی می‌دانیم اعداد فرد ۱ تا ۳۰ به ترتیب برابر ۱ و ۳ و ... و ۲۹ هستند و فقط ضرب این اعداد در هم‌دیگر، اعداد فرد تولید می‌کنند. بنابراین به جای حاصل جمع بالا می‌توانیم حاصل عبارت زیر را محاسبه کنیم.

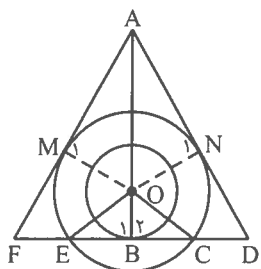
$$(1 + 3 + \dots + 29)(1 + 3 + \dots + 29) = 15^2$$

توجه: طبق ابتکار گاوس می‌دانیم $1 + 3 + \dots + 29 = 15^2$.

$$\begin{array}{r} 1 + 3 + \dots + 29 \quad A \\ + \\ 29 + 27 + \dots + 1 \\ \hline 30 + 30 + \dots + 30 \Rightarrow 2A = 15 \times 30 \Rightarrow A = \frac{15 \times 30}{2} = 15^2 \end{array}$$

(مرتضی فغامی، ابدی)

۸۵. گزینه‌های ۲ و ۴؛ می‌دانیم که شعاع دایره بر مماس در نقطه تماس عمود است.



$$\hat{M}_1 = \hat{N}_1 = 90^\circ$$

شعاع دایره $OM = ON$

$$\xrightarrow[\text{وتر و یک ضلع}]{\Delta} \hat{AON} = \hat{AOM} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2$$

ضلع مشترک OA

$$\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = 90^\circ$$

$$\xrightarrow[\text{دو زاویه و ضلع بین}]{\Delta} \hat{AFB} = \hat{ADB} \Rightarrow FB = BD$$

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$$

ضلع مشترک AB

همین‌طور داریم:

شعاع دایره $OE = OC$

$$\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = 90^\circ$$

$$\xrightarrow[\text{وتر و یک ضلع}]{\Delta} \hat{OEB} = \hat{OCB} \Rightarrow EB = BC$$

ضلع مشترک OB

بنابراین $EB = FB - FE = BD - FE = 50 - 20 = 30$ ، از طرفی مساحت حلقه $= \pi R^2 - \pi r^2$ که $R =$ شعاع دایره بزرگ و

$r =$ شعاع دایره کوچک است و داریم $R = OE$ و $r = OB$ ، مثلث قائم‌الزاویه است و بنابر قضیه فیثاغورس خواهیم داشت:

$$= \pi(R^2 - r^2) = \pi(OE^2 - OB^2) = \pi(EB^2) = \pi \times 900$$

(سارا ارشادمنش)

۸۶. گزینه ۱؛ توجه شود که a ، b و c باید متمایز باشند، بنابراین:

$$A = \text{بزرگترین} \Rightarrow a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}} = \text{کوچکترین} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ \frac{1}{b + \frac{1}{c}} = \text{کوچکترین} \end{cases}$$

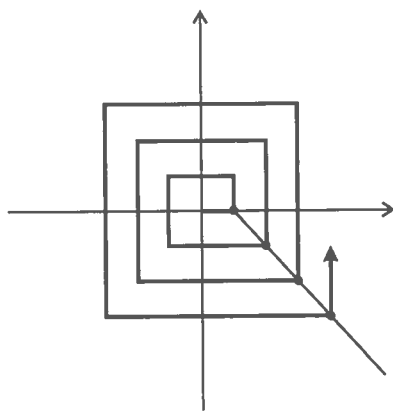
$$\Rightarrow b + \frac{1}{c} = \text{بزرگترین} \Rightarrow \begin{cases} b = 139 \\ \frac{1}{c} = \text{بزرگترین} \end{cases} \Rightarrow c = 2 \Rightarrow A = \text{بزرگترین مقدار} = \frac{1}{1 + \frac{1}{139 + \frac{1}{2}}} = \frac{2781}{2783}$$

$$A = \text{کوچکترین} \Rightarrow a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}} = \text{بزرگترین} \Rightarrow \begin{cases} a = 139 \\ \frac{1}{b + \frac{1}{c}} = \text{بزرگترین} \end{cases}$$

$$\Rightarrow b + \frac{1}{c} = \text{کوچکترین} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ \frac{1}{c} = \text{کوچکترین} \end{cases} \Rightarrow c = 1389$$

$$\Rightarrow A = \text{کوچکترین مقدار} = \frac{1}{139 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1389}}} \Rightarrow A = \text{کوچکترین} = \frac{139}{1389 + 139^2}$$

(مرتضی فغانی ابری)



(سارا ارشادمش)

۸۷. گزینه ۵؛ همان طور که در شکل می بینیم، بعد از $1^2 = 1$ حرکت در $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ و بعد از

$3^2 = 9$ حرکت در $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ و بعد از $5^2 = 25$ حرکت در $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ قرار می گیرد. همان طور که

می بینیم مختصات مکان روبات بعد از $(2n-1)^2$ حرکت $\begin{bmatrix} n \\ -(n-1) \end{bmatrix}$ است. پس به دنبال

نزدیکترین مجذور کامل نزدیک به ۳۶۴ می گردیم. $19^2 = 361$ ، پس بعد از ۳۶۱ حرکت

در $\begin{bmatrix} 10 \\ -9 \end{bmatrix}$ قرار می گیرد، سه حرکت تا ۳۶۴ مانده است که باید به سمت بالا باشد، پس به

می رسیم. $\begin{bmatrix} 10 \\ -6 \end{bmatrix}$

۸۸. گزینه ۴؛ با حذف بخش های یکسان از هر دو داریم:

$$A = 7 + 2\sqrt{5} + 3\sqrt{2} + \sqrt{1}$$

$$B = 7 + \sqrt{5} + \sqrt{2} + 2\sqrt{1}$$

$$A' = \sqrt{5} + 2\sqrt{2} \simeq 5, \quad B' = \sqrt{1} \simeq 3$$

(سارا ارشادمش)

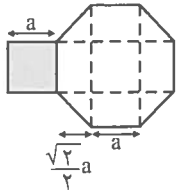
در نتیجه $A < B + 3$

۸۹. گزینه ۱؛ روشن است که $2 = 2$ ثابت می‌کنیم که اگر $n > 2$ باشد $n > n$ عدد زیر را در نظر می‌گیریم:

$$n^? - 1 = 2 \times 3 \times 5 \times \dots \times p - 1$$

که در آن p ، بزرگ‌ترین عدد اولی است که از n تجاوز نمی‌کند. این عدد بر عدد اولی که کوچک‌تر یا مساوی p باشد، قابل قسمت نیست. یعنی یا این عدد اول است و یا بر عدد اولی بزرگ‌تر از p قابل قسمت است، یعنی این عدد از n بزرگ‌تر است: $n^? - 1 > n$ و $n^? > n$.
(کیوان فهسته)

۹۰. گزینه ۱؛ چون سطح دیوار بسیار بزرگ است، نسبت تعداد مربع‌ها به هشت‌ضلعی‌ها به عدد یک نزدیک است، یعنی به‌ازای هر مربع یک هشت‌ضلعی وجود دارد. پس کافی است نسبت مساحت یک هشت‌ضلعی منتظم به یک مربع را بیابیم.



مساحت هر مربع a^2

$$a^2 + 4 \times a \times \frac{\sqrt{2}}{2} a + a^2 = (2 + 2\sqrt{2})a^2$$

↑ مساحت مربع وسط
↑ مساحت چهار مستطیل
↑ مساحت چهار مثلث

پس پاسخ مورد نظر $(2 + 2\sqrt{2})$ است.

(زهره پندی)

۹۱. گزینه ۲؛ اگر در دایره‌ها از چپ به راست اعداد x, y, z و t قرار گرفته باشند، در مربع‌ها از چپ به راست اعداد $xyzt, x^2t^2, y^2z^2, z^2t^2$ قرار می‌گیرند. پس در هر یک از دو مستطیل عدد $x^3y^3z^3t^3$ و در مثلث عدد $x^6y^6z^6t^6$ قرار می‌گیرد. تجزیه این عدد به عوامل اول دارای نماهایی از مضرب ۶ برای هر پایه اول است یعنی اگر عوامل اول آن p_1, p_2, \dots, p_m باشند، تجزیه آن به‌صورت زیر است:

$$p_1^{6k_1} p_2^{6k_2} p_3^{6k_3} \dots p_m^{6k_m}$$

برای شمارش تعداد مقسوم‌علیه‌های چنین عددی، فرم تجزیه شده آن مقسوم‌علیه را در نظر می‌گیریم. چون مقسوم‌علیه عبارت فوق است پس عوامل اول آن از p_1 تا p_m فراتر نمی‌رود و نمای هر عامل اول در آن از نمای مربوطه در عدد اصلی فراتر نمی‌رود یعنی به‌صورت زیر است:

$$p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \dots p_m^{\alpha_m} : 0 \leq \alpha_i \leq 6k_i \quad 1 \leq i \leq m$$

که با انتخاب هر مجموعه از α_i ‌ها یک مقسوم‌علیه یکتا از عدد مورد نظر تعیین می‌شود و با توجه به رابطه $0 \leq \alpha_i \leq 6k_i$ ، برای انتخاب α_i به تعداد $6k_i + 1$ حالت وجود دارد، پس تعداد مقسوم‌علیه‌ها برابر است با:

$$(6k_1 + 1) \times (6k_2 + 1) \times (6k_3 + 1) \times \dots \times (6k_m + 1)$$

(مجتبی فامی‌ابری)

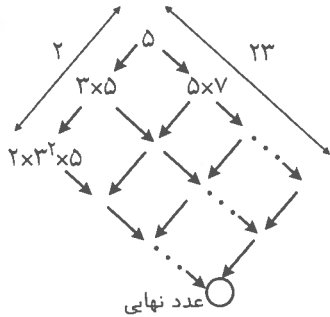
که باید بر ۶ باقی‌مانده ۱ داشته باشد که در گزینه‌ها فقط شامل حال ۸۵ می‌شود.

(کیان کریمی‌فراسانی)

۹۲. گزینه ۱؛

۹۳. گزینه ۳؛ رأس قائمه مثلث قائم‌الزاویه، زاویه محاطی کمان 180° است لذا دو سر وتر قطری از دایره محیطی 74° ضلعی است یعنی اگر دو قطر اصلی 74° ضلعی منتظم را رسم کنیم تا یک‌دیگر را در نقطه O قطع کنند دایره‌ای به مرکز O و به شعاع نصف قطر اصلی 74° ضلعی منتظم، از تمام رئوس 74° ضلعی منتظم می‌گذرد و بنابراین وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای که با رئوس این 74° ضلعی ساخته می‌شود باید قطر اصلی این 74° ضلعی باشد. برای وتر ثابت، رأس قائمه هر یک از 72 رأس دیگر می‌تواند باشد و چون این 74° ضلعی منتظم، 37 قطر اصلی دارد پس تعداد مثلث‌های قائم‌الزاویه مورد نظر برابر است با: 37×72 . مثلث متساوی‌الاضلاع نمی‌تواند ساخته شود. (چرا؟)

(مجتبی فامی‌ابری)

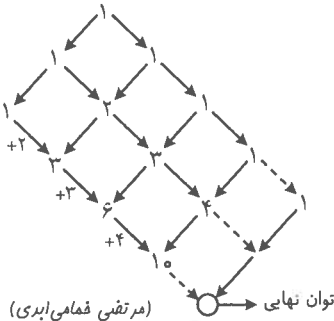


۹۴. گزینه ۱؛ توان عامل ۵ در عدد نهایی برابر است با تعداد مسیرهای حرکت در شبکه روبه‌رو از ۵ به عدد نهایی البته در جهت‌های نشان داده شده (چرا؟) این یک شبکه ۲×۲۳ می‌باشد که تعداد مسیرها از عدد ۵ به عدد نهایی برابر است با:

حال در این شبکه فقط عدد مربوط به توان ۵ را می‌گذاریم.

$$\text{توان نهایی } ۵ = ۱ + ۲ + ۳ + \dots + ۲۴ = \frac{۲۵ \times ۲۴}{۲} = ۲۵ \times ۱۲ = ۳۰۰$$

(برای درک بیشتر این مسئله، کمی مطالعه در مبحث ترکیبات مقدماتی پیشنهاد می‌گردد.) البته حل این مسئله از طریق حل چند مثال ساده‌تر و الگویابی نیز امکان‌پذیر می‌باشد.



(مرتضی قمامی ابری)

۹۵. گزینه ۲؛ $n^2 - n = (n-1)n$ پس چون $۱۰۰۰ | n^2 - n$ باید از n و $(n-1)$ یکی بر ۸ و دیگری بر ۱۲۵ بخش‌پذیر باشد.

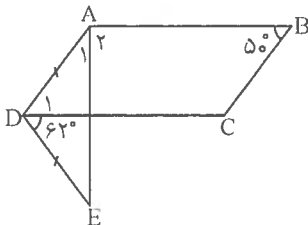
I: اگر n مضرب ۱۲۵ باشد و $n-1$ مضرب ۸ باشد به عدد $n = ۶۲۵$ می‌رسیم.

II: اگر $n-1$ مضرب ۱۲۵ باشد و n مضرب ۸ باشد، باید داشته باشیم $n-1 = ۳۷۵$ و $n = ۳۷۶$.

پس تعداد این اعداد دوتا است.

۹۶. گزینه ۴؛

(کیوان فیسته)



(مؤید منشوری)

$$ABCD \text{ متوازی‌الاضلاع} \rightarrow \hat{B} = \hat{D}_1 \text{ و } \hat{C} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 \text{ و } \hat{C} = ۱۸۰^\circ - \hat{B} = ۱۳^\circ$$

$$ADE \text{ متساوی‌الساقین} \rightarrow \hat{A}_1 = \hat{E} = \frac{۱۸۰^\circ - \hat{D}}{۲} = \frac{۱۸۰^\circ - (۶۲^\circ + ۵^\circ)}{۲} = ۳۴^\circ$$

$$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \hat{C} \rightarrow \hat{A}_2 = \hat{C} - \hat{A}_1 = ۱۳^\circ - ۳۴^\circ = ۹۶^\circ$$

۹۷. گزینه ۳؛

گزینه ۱: $\frac{1}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{5} + \frac{1}{12} = \frac{17}{60}$

گزینه ۲: $\frac{1}{5} \times \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{15} - \frac{1}{4} = -\frac{11}{60}$

گزینه ۵: $\frac{1}{5} \div \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{3}{5} - \frac{1}{4} = \frac{7}{20} = \frac{21}{60}$

(مؤید منشوری)

گزینه ۱۰: $\frac{1}{5} + \frac{1}{3} \div \frac{1}{4} = \frac{1}{5} + \frac{4}{3} = \frac{23}{15} = \frac{92}{60}$

گزینه ۱۳: $\frac{1}{5} - \frac{1}{3} \div \frac{1}{4} = \frac{1}{5} - \frac{4}{3} = -\frac{17}{15} = -\frac{68}{60}$

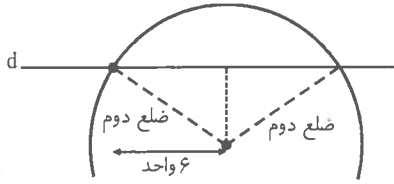
۹۸. گزینه ۳؛

$۲, ۴, ۶, ۸, ۱۰, ۱۲, ۱۴, ۱۶, ۱۸, ۲۰, \dots$
 ۳۰ ۳۰

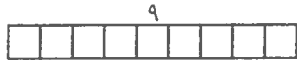
منزل خانم سهرابی

(کبری دلشاد)

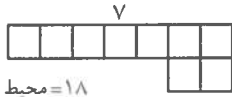
$$s = \frac{1}{2}ah \rightarrow v = \frac{1}{2} \times 6 \times h \rightarrow h = \frac{v}{3} \text{ واحد}$$



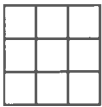
(مییر منشوری)



محیط = ۲۰



محیط = ۱۸



(گبری دشار)

ابتدا ضلعی به طول ۶ رسم می‌کنیم و سپس خطی موازی آن و به فاصله $\frac{v}{3}$ رسم می‌کنیم. به مرکز یکی از دو سر ضلع و به شعاع ۸ کمان می‌زنیم. این کمان خط موازی را به دو نقطه قطع می‌کند. ضلع سوم فاصله سر دیگر ضلع به اندازه ۶ از محل برخورد کمان با خط موازی خواهد بود.

۱۰۰. گزینه ۴؛ حالتی که مربع‌ها در یک ردیف چیده شوند (شکل روبه‌رو) محیط ۲۰ را داراست. تمام حالت‌هایی که مربع‌ها در ۲ ردیف و ۷ ستون باشند، محیطی برابر ۱۸ دارند. تمام حالت‌هایی که مربع‌ها در ۲ ردیف و ۶ ستون باشند، محیطی برابر ۱۶ دارند. تمام حالت‌هایی که مربع‌ها در ۲ ردیف و ۵ ستون باشند، محیطی برابر ۱۴ دارند. تمام حالت‌هایی که مربع‌ها در ۳ ردیف و ۳ ستون باشند، محیطی برابر ۱۲ دارند.

$$x : y$$

۱۰۱. گزینه ۲؛ همان‌طور که می‌دانیم $Z = X +$ در نتیجه خواهیم داشت:

$$y = Z$$

{ یا

به طور مشابه

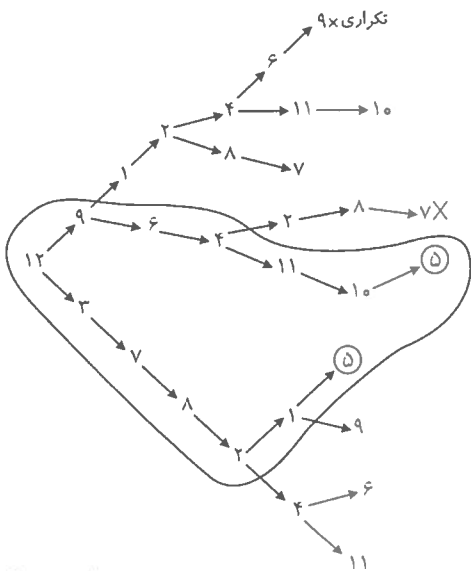
غیرقابل قبول

پس X تنها یک جواب دارد.

۱۰۲. گزینه ۱؛

{۱, ۳, ۶, ۱۰, ۱۵, ۲۱, ...}

از ۱۲ شروع می‌کنیم و از دو طرف، شش گام جلو می‌رویم!



(زهرة پندی)

تنها مسیر ممکن، مسیری است که درون خط بسته قرار گرفته است.

۱۰۳. گزینه ۱؛

$$۱۳۹۲ = ۲^۴ \times ۳ \times ۲۹$$

از آن جا که $(۱۳۹۲^{۲۳۲})^۶ = ۱۳۹۲^{۱۳۹۲}$ پس $۱ - ۱۳۹۲^{۲۳۲}$ عدد قبل از عدد آخر وجود دارند که اگر به توان ۶ برسند حاصل کوچک تر از

عدد آخر می شود. پس در کل (با در نظر گرفتن عدد آخر) $۱۳۹۲^{۲۳۲}$ عدد داریم که هم مربع کامل و هم مکعب کامل اند. (زهره بندی)

۱۰۴. گزینه ۴؛ اگر مستطیل $۱ \times a$ باشد در آن a مربع دیده می شود \leftarrow مستطیل ۱×۵ یکی از پاسخها است.

اگر مستطیل $۲ \times a$ باشد در آن $(۲a)$ مربع ۱×۱ و $(a-۱)$ مربع ۲×۲ دیده می شود \leftarrow

مستطیل ۲×۱۷ یکی از پاسخهاست. $\rightarrow a = ۱۷ \rightarrow ۳a - ۱ = ۵۰ \rightarrow ۳a + a - ۱ = ۵۰$

اگر مستطیل $۳ \times a$ باشد در آن $(۳a)$ مربع ۱×۱ و $(۲(a-۱))$ مربع ۲×۲ و $(a-۲)$ مربع ۳×۳ دیده می شود \leftarrow

مستطیل ۳×۹ یکی از پاسخها است. $\rightarrow a = ۹ \rightarrow ۶a - ۴ = ۵۰ \rightarrow ۳a + ۲a - ۲ + a - ۲ = ۵۰$

اگر مستطیل $۴ \times a$ باشد در آن $(۴a)$ مربع ۱×۱ ، $(۳(a-۱))$ مربع ۲×۲ ، $(۲(a-۲))$ مربع ۳×۳ و $(a-۳)$ مربع ۴×۴ دیده می شود

\leftarrow مستطیل ۴×۶ یکی از پاسخها است. $\rightarrow a = ۶ \rightarrow ۱۰a - ۱۰ = ۵۰ \rightarrow ۴a + ۳a - ۳ + ۲a - ۴ + a - ۳ = ۵۰$

اگر مستطیل $۵ \times a$ باشد، در آن $(۵a)$ مربع ۱×۱ ، $(۴(a-۱))$ مربع ۲×۲ ، $(۳(a-۲))$ مربع ۳×۳ ، $(۲(a-۳))$ مربع ۴×۴ و $(a-۴)$

مربع ۵×۵ دیده می شود:

پاسخ ندارد! $\rightarrow ۱۵a - ۲۰ = ۵۰ \rightarrow ۱۵a + ۴a - ۴ + ۳a - ۶ + ۲a - ۶ + a - ۴ = ۱۵a - ۲۰ = ۵۰$

و چون $\frac{۷۰}{۱۵} > ۵$ پس حل مسئله به پایان رسیده است. (زهره بندی)

۱۰۵. گزینه ۵؛ برای این که افراد احساس خوبی از تقسیم اموال داشته باشند ابتدا هر وسیله را به شخصی می دهیم که بیشترین قیمت را

برای آن وسیله داده باشد پس:

	آرتا	مانا	دانا
سهام عادلانه	۹۸۰۰	۹۵۰۰	۱۰۰۰۰
ماشین و پیانو	قایق
ارزش هر مورد	۲۵۰۰	۰	۸۰۰۰
پول نقد تا رسیدن به یک تقسیم عادلانه	۷۳۰۰	۹۵۰۰	۲۰۰۰

توجه کنید در ستول اول جدول سؤال $۹۸۰۰ = (۲۵۰۰ + ۵۰۰۰ + ۱۹۰۰ + ۲۰۰۰) \div ۳$

جیرینگ $۷۳۰۰ + ۹۵۰۰ + ۲۰۰۰ = ۱۸۸۰۰$

جیرینگ $۲۰۰۰۰ - ۱۸۸۰۰ = ۱۲۰۰$

جیرینگ $۱۲۰۰ \div ۳ = ۴۰۰$

پس آرتا: جیرینگ $۷۷۰۰ + ۲۴۰۰$ / مانا: ۹۹۰۰ جیرینگ / دانا: جیرینگ $۲۴۰۰ + ۲۴۰۰$ ماشین + پیانو (کبری دشار)

۱۰۶. گزینه ۴؛ اگر از گوشه پایین سمت راست به سمت چپ نگاه کنیم، می بینیم که عرض مربع با $۱ + ۲ + ۳ + \dots + ۶$ مربع کوچک پر

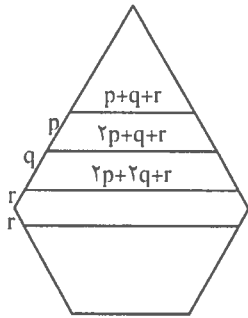
می شود. بنابراین مساحت مربع $(۱ + ۲ + \dots + ۶)^۲$ است. از طرفی مربع ۶×۶ گوشه سمت چپ بالا در \square واقع شده که ۶ مربع هم اندازه

خودش در \square جای می گیرند، همین طور ۵×۵ مربع ۵ داریم و... پس مساحت $۱^۳ + ۲^۳ + \dots + ۵^۳ + ۶^۳$ خواهد شد.

(سارا ارشادمشر)

$$\leftarrow ۱^۳ + ۲^۳ + \dots + ۵^۳ + ۶^۳ = (۱ + ۲ + \dots + ۶)^۲$$

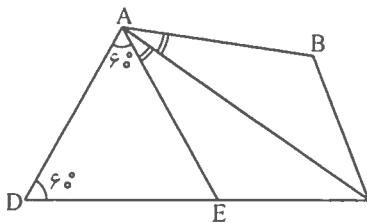
۱۰۷. گزینه ۵؛ مثلثی که روی یکی از ضلع‌های شش‌ضلعی با ادامه دادن دو ضلع دیگر ساخته می‌شود، متساوی‌الاضلاع است. چون همه زوایای آن 60° درجه‌اند. به همین دلیل همه مثلث‌های دیگر که در شکل روبه‌رو دیده می‌شوند هم، متساوی‌الاضلاع هستند. در شکل بالا با توجه به این مطلب اندازه ضلع‌های مثلث‌های روی آن‌ها نوشته شده است.



$$\left. \begin{array}{l} p \text{ محیط دوزنقه‌ای با ضلع } p: 5p + 2q + 2r \\ q \text{ محیط دوزنقه‌ای با ضلع } q: 4p + 5q + 2r \\ \text{محیط شش‌ضلعی: } 4p + 4q + 6r \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow p = 3q \\ \rightarrow q = 4r \end{array} \rightarrow p = 12r$$

(زهره پندری)

۱۰۸. گزینه ۲؛ نقطه E را روی ضلع CD طوری انتخاب می‌کنیم که زاویه DAE برابر 60° شود. در این صورت مثلث ADE مثلثی



متساوی‌الاضلاع می‌شود. هم‌چنین طبق فرض مسئله خواهیم داشت $\widehat{CAE} = \widehat{CAB}$ حال داریم:

$$\left. \begin{array}{l} AE = AB = AD \\ AC \text{ مشترک} \\ \widehat{BAC} = \widehat{EAC} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle BAC = \triangle EAC \Rightarrow CE = BC \Rightarrow CD = AB + BC$$

(کیان کریمی فراسانی)

۱۰۹. گزینه ۳؛ از ۳۶ حالت به وجود آمده فقط چهار حالت $(8, 1), (6, 3), (6, 3), (5, 4)$ مجموع ۹ دارند پس $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

(همیدرشا زیارتی)

۱۱۰. گزینه ۳؛ فرض می‌کنیم به ترتیب a, b, c نفر از هر کشور حضور داشته باشند. در این صورت داریم:

$$ab + bc + ac = \frac{322}{2} = 161$$

از طرفی در روز دوم داریم:

$$(a+1)(b+1) + (b+1)(c+1) + (a+1)(c+1) = ab + bc + ac + 2(a+b+c) + 3 = \frac{416}{2} = 208$$

پس تعداد کل دانش‌آموزان می‌شود $(a+b+c) = \frac{208 - 161 - 3}{2} = 22$. پس a, b, c سه عدد هستند که مجموعشان ۲۲ است و

مجموع ضرب روبه‌روی آن‌ها ۱۶۱.

می‌توان از این‌جا دو راه‌حل را دنبال کرد:

راه اول: با آزمون و خطا روی اعدادی که جمعشان برابر با ۲۲ است می‌توان به طور شهودی متوجه شد که مجموع ضرب دوبره‌دویشان وقتی

بیش‌تر می‌شود که این سه عدد به هم نزدیک‌تر باشند. برای مثال مجموع ضرب دوبره‌دوی سه عدد ۳، ۴ و ۱۵ بسیار کم‌تر از ۶، ۷ و ۹ است.

پس گزینه ۷، ۷ و ۸ را آزمایش می‌کنیم که برابر با جواب است.

راه دوم: فرض می‌کنیم S برابر باشد با:

$$S = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (a - c)^2 = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ac$$

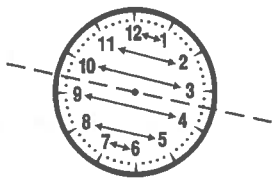
$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac = \frac{S}{2} + 3(ab + bc + ac)$$

پس $22^2 = \frac{S}{2} + 3 \times 161$ پس نتیجه می‌گیریم $484 = \frac{S}{2} + 483$ پس $S = 2$

پس $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (a - c)^2 = 0 + 1 + 1 = 2$

بنابراین دو تا از عددهای a ، b و c با هم برابر هستند و با سومی یک واحد اختلاف دارند و چون مجموعشان ۲۲ شده است، پس یکی ۸ می‌شود و دوتای دیگر ۷.

(کیان کریمی فراسانی)



(زهرة پندی)

۱۱۱. گزینه ۳؛ حاصل جمع اعداد روی ساعت برابر 6×13 است. اعدادی را که حاصل جمع آن‌ها ۱۳ است به هم وصل می‌کنیم. حالا می‌توانیم با یک خط ساعت را طوری به دو نیم تقسیم کنیم که حاصل جمع اعداد دو طرف با هم مساوی شوند.

۱۱۲. گزینه ۱؛ ابتدا اعداد را ساده کرده:

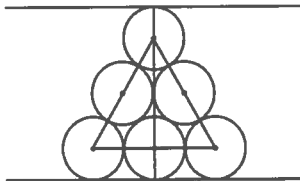
$$-\sqrt{12} = -2\sqrt{3}, \quad \sqrt{3}, \quad \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

$$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}, \quad -\sqrt{18} = -3\sqrt{2}, \quad -\sqrt{2}$$

(عمیدرضا بیات)

پس در بین گزینه‌ها تنها عدد $2\sqrt{2}$ به دست نمی‌آید.

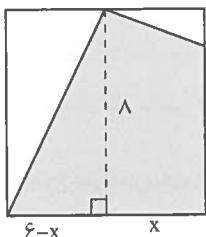
۱۱۳. گزینه ۲؛ اگر مراکز دایره‌ها را به هم وصل کنیم مثلثی متساوی‌الاضلاع به ضلع 20 به دست می‌آید. 1 برابر است با ارتفاع این مثلث $21 +$



(فرقنده ترابی)

$$1 = 10 + \frac{\sqrt{3}}{2} \times 20 = 10 + 10\sqrt{3}$$

۱۱۴. گزینه ۴؛ روش اول:



$$\frac{8(6-x)}{2} + \frac{x(14)}{2} = \frac{3}{4}(6 \times 8) \Rightarrow 4(6-x) + 7x = 36 \Rightarrow 24 - 4x + 7x = 36$$

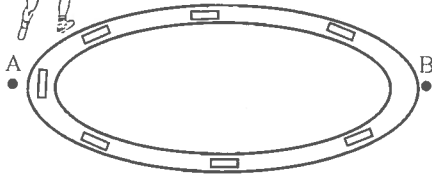
$$\Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4$$

روش دوم:

مساحت هاشورنخورده $= \frac{1}{4} \times (6 \times 8) = 12$

مساحت هاشورنخورده $= \frac{x \times 2}{2} + \frac{(6-x) \times 8}{2} = x + 24 - 4x = 24 - 3x \Rightarrow 24 - 3x = 12 \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4$

(زهرة پندی)



$$1100 + 800 = 1900$$

(عمیررضا زیارتی)

۱۱۵. گزینه ۴؛ تا اولین برخورد مجموع مسافت‌هایی که دو دونده طی کرده‌اند برابر نصف محیط بیضی است. از اولین برخورد تا دومین برخورد مجموع مسافت‌هایی که دو دونده طی می‌کنند برابر محیط بیضی است. با توجه به ثابت بودن سرعت دو دونده و این‌که وقتی دو نفر در مجموع نصف محیط میدان را دویده بودند، A، ۴۰۰ متر آن را دویده است، نتیجه می‌گیریم وقتی دو نفر کل محیط میدان را دویده‌اند، A، ۸۰۰ متر را دویده است. پس پاسخ برابر است با:

۱۱۶. گزینه ۴؛ نمودار، دو رقم سمت راست مربع عدد ورودی را در خروجی نشان می‌دهد.

- اگر ورودی زوج باشد $(2k)$ ، مربع آن $(4k^2)$ و بنابراین خروجی مضرب ۴ است.

- اگر ورودی فرد باشد $(2k+1)$ ، باقی‌مانده مربع آن $(4k^2 + 4k + 1)$ بر ۴ برابر ۱ است و بنابراین باقی‌مانده خروجی بر ۴ هم برابر ۱

(زهرا پندی)

است. در میان پاسخ‌ها تنها ۷۶ است که می‌تواند خروجی موردنظر باشد.

۱۱۷. گزینه ۴؛

۱ فلش: تا رسیدن به $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

۱+۲+۳ فلش: تا رسیدن به $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

۱+۲+۳+۴+۵ فلش: تا رسیدن به $\begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$

:

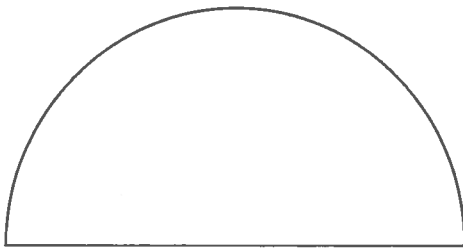
۱+۲+۳+...+۱۱=۶۶ فلش: تا رسیدن به $\begin{bmatrix} 1 \\ 12 \end{bmatrix}$

(زهرا پندی)

از نقطه $\begin{bmatrix} 1 \\ 12 \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 11 \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \end{bmatrix}$ یعنی ۶۹ فلش روی هم رسم شده است.

۱۱۸. گزینه ۴؛ نیم‌دایره به ۱۰ قسمت مساوی تقسیم شده است، پس اندازه هر کمان ۱۸ درجه می‌باشد. زاویه موردنظر، زاویه محاطی روبه‌رو به ۹ تا از این کمان‌ها است. پس

اندازه آن $\frac{9 \times 18}{2}$ یعنی ۸۱ درجه می‌باشد.



(زهرا پندی)

۱۱۹. گزینه ۲؛ چون سامان سکه را یک بار بیش‌تر از ساسان انداخته است. پس یا تعداد شیرهایش بیش‌تر است یا تعداد خط‌هایش.

(عمیررضا زیارتی)

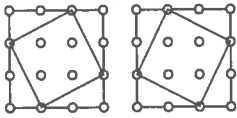
۱۲۰. گزینه ۲؛ اگر فرض کنیم گزینه ۱ صحیح است پس حتماً بقیه از جمله گزینه ۴ غلط هستند، پس N زوج است و این درستی گزینه ۲ را علاوه بر گزینه ۱ تأیید می‌کند. اما اگر فرض کنیم گزینه ۲ درست است پس N زوج است. در نتیجه گزینه ۴ غلط است. و غلط بودن گزینه ۱ (زوج بودن M)، غلط بودن گزینه ۳ و ۵ را نیز نتیجه می‌دهد.
 ۱۲۱. گزینه ۴؛

$$(n+1)(n+2)\dots(n-1)(2n) = \frac{1 \times 2 \times \dots \times 2n}{1 \times 2 \times \dots \times n} = 1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1) \times \frac{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2n}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n} = 1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1) \times 2^n$$

$$2n = 2012 \Rightarrow n = 1006$$

(کیهان فبسته)

۱۲۲. گزینه ۳؛ در هر مربع 3×3 (شامل ۱۶ نقطه) دو مربع به ضلع $\sqrt{5}$ رسم می‌شود.



(کیان کریمی فراسانی)

و در شکل ۲۵ تا مربع 3×3 وجود دارد.

۱۲۳. گزینه ۲؛ مثلاً عدد را ۳ رقمی در نظر می‌گیریم.

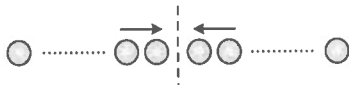
$$\overline{abc} = a + b + c + c^2 \Rightarrow 100a + 10b + c = a + b + c + c^2 \Rightarrow 99a + 9b = c^2$$

از آن جایی که c^2 حداکثر می‌تواند ۸۱ باشد پس رتبه صدگان صفر خواهد بود و چون $9b = c^2$ پس c^2 باید مضربی از ۳ باشد یعنی ۳، ۶ و ۹ پس اعداد عبارتند از:

$$c = 3, b = 1 \Rightarrow 13 \quad c = 6, b = 4 \Rightarrow 46 \quad c = 9, b = 9 \Rightarrow 99$$

(فرقنده ترابی)

۱۲۴. گزینه ۲؛



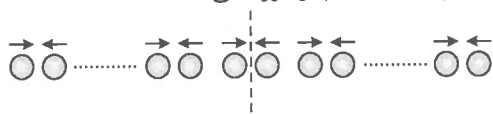
در ابتدا یک برخورد صورت می‌گیرد. دو مهره تصادف کرده با همان سرعت بازگشته و دو برخورد جدید صورت می‌گیرد.



این بار نیز مهره‌های تصادف کرده در خلاف جهت حرکت قبلی خود بازمی‌گردند و سه برخورد جدید روی می‌دهد:



به همین ترتیب بار آینده ۴ برخورد، بعدی ۵ برخورد و... روی می‌دهد تا به ۱۰۰ برخورد می‌رسیم که ۵۰ تای آن بین مهره‌های چپ و ۵۰ تا بین مهره‌های راست است. حال که دو مهره انتهایی دو طرف دچار برخوردها شده‌اند، دور می‌شوند. از بین ۹۹ مهره باقی‌مانده در هر دو طرف، ۴۸ برخورد بین هر دو تای مجاور صورت می‌گیرد، به استثنای دو مهره پیش روی اولیه که با هم برخورد می‌کنند.



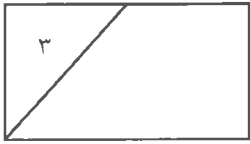
پس این بار $1 + 2(48) = 97$ برخورد داریم. باز دو مهره انتهایی دور می‌شوند و بین مانده‌ها ۹۸ برخورد صورت می‌گیرد و به همین ترتیب ۹۶، ۹۷ و ۱ برخورد خواهیم داشت. مجموع کل برخوردها از این قرار است:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 100 + 99 + 98 + 97 + \dots + 2 + 1 = 10000$$

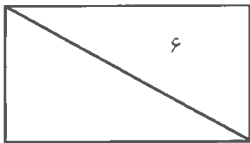
(سارا ارشادمش)

۱۲۵. گزینه ۴؛ کفش دوزک یک دور کامل چرخیده است. دقت کنید که وقتی کفش دوزک به هر رأس مثلث می‌رسد، به اندازه زاویه خارجی مثلث می‌چرخد و مجموع زاویه‌های خارجی پنج ضلعی، 360° درجه است.
(زهره پندری)

۱۲۶. گزینه ۵؛ $\frac{1}{4}$ مساحت مستطیل برابر ۳ است. بنابراین $\frac{1}{4}$ مساحت مستطیل برابر ۶ خواهد بود.



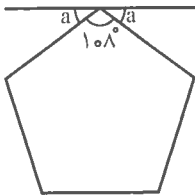
بنابراین مساحت قسمت هاشورخورده برابر $6 - 1 = 5$ می‌شود.



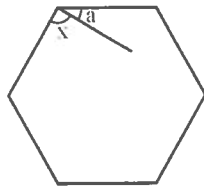
(زهره پندری)

۱۲۷. گزینه ۴؛ هر زاویه داخلی یک پنج ضلعی منتظم 108° درجه است. پس زاویه‌ای که در شکل زیر (شکل (۱)) با a نمایش داده شده

است، $\frac{180^\circ - 108^\circ}{2}$ یعنی 36° درجه است. هر زاویه داخلی یک شش ضلعی منتظم 120° درجه است. پس زاویه X ، $120^\circ - 36^\circ$ یعنی 84° درجه است.



(۱)



(۲)

(زهره پندری)

۱۲۸. گزینه ۲؛

۵ حالت: $6 = 4 + 2, 3 + 3, 2 + 4, 5 + 1, 1 + 5$

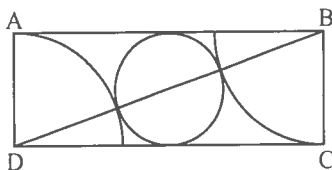
۶ حالت: $7 = 1 + 6, 2 + 5, 3 + 4, 4 + 3, 5 + 2, 6 + 1$

۵ حالت: $8 = 2 + 6, 3 + 5, 4 + 4, 5 + 3, 6 + 2$

۴ حالت: $9 = 6 + 3, 5 + 4, 4 + 5, 3 + 6$

۳ حالت: $10 = 6 + 4, 5 + 5, 4 + 6$

(عمیدرضا بیات)



۱۲۹. گزینه ۳؛ اگر قطر BD را مطابق شکل رسم کنیم، چون این قطر از مرکزهای دایره و دو ربع دایره و نیز محل مماس‌ها می‌گذرد، طولش برابر با مجموع شعاع‌های دو ربع دایره و قطر دایره می‌شود. پس طول BD می‌شود: $2 + 2 + 2 = 6$.

حال در مثلث ABD رابطه فیثاغورس را می‌نویسیم:

$$AB^2 + AD^2 = BD^2 \Rightarrow AB^2 + 2^2 = 6^2 \Rightarrow AB = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

(عمیدرضا زیارتی)

۱۳۰. گزینه ۲):

$$m + (m+1) + (m+2) + \dots + (m+k) = 1000$$

که با توجه به مجموع جمله‌های یک تصاعد حسابی به دست می‌آید:

$$\frac{2m+k}{2} \times (k+1) = 1000 \Rightarrow (2m+k)(k+1) = 2000$$

چون تفاضل $2m-1 = (2m+k) - (k+1)$ عددی فرد است، پس از دو عدد $2m+k$ و $k+1$ ، یکی زوج و دیگری فرد است. علاوه بر این روشن است که $2m+k > k+1$. پس به جواب‌های زیر می‌رسیم:

$$2m+k = 2000, k+1=1 \text{ یعنی } m=1000, k=0$$

$$2m+k = 400, k+1=5 \text{ یعنی } m=198, k=4$$

$$2m+k = 125, k+1=16 \text{ یعنی } m=55, k=15$$

$$2m+k = 80, k+1=25 \text{ یعنی } m=28, k=24$$

(کبوان فوسته)

۱۳۱. گزینه ۱): ادعا می‌کنیم که بعد از هر بار عمل، مجموع معکوس عددها ثابت می‌ماند: فرض می‌کنیم که اعداد $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$

رو تخته نوشته شده باشند، در این صورت مجموع معکوس‌های این عددها می‌شود $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n}$

حال اگر مثلاً دو عدد a_2 و a_3 را انتخاب کنیم بعد از انجام عملیات، این دو عدد پاک شده و عدد $\frac{a_2 \times a_3}{a_2 + a_3}$ نوشته می‌شود و مجموع

معکوس‌های اعداد روی تخته می‌شود:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{\frac{a_2 \times a_3}{a_2 + a_3}} + \frac{1}{a_4} + \dots + \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} + \frac{a_2 + a_3}{a_2 \times a_3} + \frac{1}{a_4} + \dots + \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \dots + \frac{1}{a_n}$$

پس ثابت شد که مجموع معکوس‌ها، عددی ثابت می‌ماند. (دقت کنید که اگر به جای دو عدد a_2 و a_3 هر دو عدد دیگری را انتخاب می‌کردیم، استدلال فرقی نمی‌کرد. چرا؟! حال قطعاً معکوس عدد نهایی، برابر با مجموع معکوس عددها است.

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{20}} = \frac{2^{21} - 1}{2^{20}} \Rightarrow x = \frac{2^{20}}{2^{21} - 1}$$

(کیان کریمی فراسانی)

دانش‌آموزان علاقه‌مند می‌توانند برای مطالعهٔ بیشتر، مبحث (invariant) را مطالعه کنند.



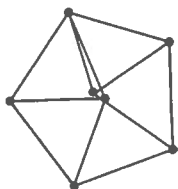
۱۳۲. گزینه ۵): تمام 2^7 حالت را می‌توان نوشت با این استراتژی که مسئله را باید از آخر به اول حل کنید. ببینید در پایان کدام کفه باید

(فخرنقده ترابی)

پایین قرار گیرد، سنگین‌ترین وزنه را برای آن کفه کنار بگذارید و...

۱۳۳. گزینه ۳): طول تمام پاره‌خطها برابر ۳ است ولی اگر نقطهٔ دیگری به شکل اضافه کنیم در این صورت دو نقطه در این شکل وجود

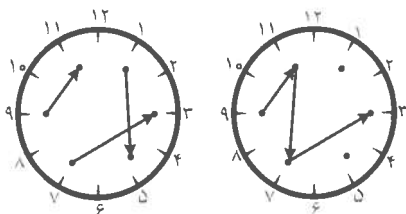
دارند که با آن نقطه مثلثی تشکیل می‌دهند که هیچ ضلعی برابر ۳ ندارد.



(همیدرضا زیارتی)

پایه هشتم

۱۳۴. گزینه ۱؛ به شکل دقت کنید، متوجه خواهید شد که بردار $5 \rightarrow 1$ برابر با بردار $7 \rightarrow 11$ است:



(کیان کریمی فراسانی)

که مجموع بردارها در شکل سمت راست برابر می‌شود با $3 \rightarrow 9$
گزینه ۱؛ ۱۳۵

$$7 - (-9) = 7 + 9 = 16$$

(کیان کریمی فراسانی)

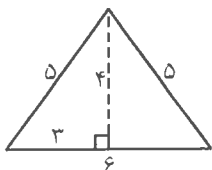
گزینه ۲؛ ۱۳۶

$$2^9 \times 3^2 \times 2 = 4608 \times 2$$

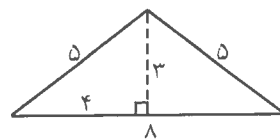
(عمیر کاملی)

پس عدد مورد نظر 4608 امین مضرب 2 یا به عبارتی عدد زوج طبیعی است.

گزینه ۳؛ ۱۳۷



$$\text{مساحت} = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12$$



$$\text{مساحت} = \frac{1}{2} \times 8 \times 3 = 12$$

(مبیر منشوری)

۱۳۸. گزینه ۱؛ در مربع قطر از اندازه ضلع بزرگ‌تر است. اگر ضلع مربع 1 باشد قطر $\sqrt{2}$ است. محیط شکل 1 برابر با 4 قطر است. یعنی

$$4\sqrt{2}$$

محیط شکل 2 برابر با $4 + 2\sqrt{2}$ است. محیط شکل 3 برابر با $4 + 2\sqrt{2}$ است. محیط شکل 4 برابر با 6 است. محیط شکل 5 برابر با



$4 + 2\sqrt{2}$ است. پس باید بین گزینه ۱ و ۴ انتخاب کنیم.

$$4\sqrt{2} = 4 \times 1/2 = 4/8 < 6/4(4 + 2\sqrt{2} = 4 + 2 \times 1/2 = 4 + 2/4 = 6/4)$$

(مبیر منشوری)

۱۳۹. گزینه ۱؛ اعداد اول بین 100 تا 200 هیچ‌یک از عوامل 2 و 5 را ندارند و خود نیز 2 نیستند. پس وقتی تعدادی عدد فرد در هم

(عمیر کاملی)

ضرب می‌شوند هیچ صفری در سمت راست عدد مشاهده نمی‌شود.

گزینه ۲؛ ۱۴۰

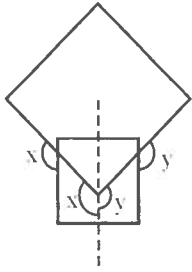
$$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{2}{7} = \frac{35 + 21 + 30}{105} = \frac{86}{105}$$

$$105 - 86 = 19$$

(مبیر منشوری)

پس 35 سکه طلا، 21 سکه نقره، 30 سکه برنز و 19 سکه مس داریم که در مجموع 105 سکه می‌شود.

۱۴۱. گزینه ۲؛ خط چین را موازی ضلع مربع کوچک رسم می‌کنیم. طبق قضایای خطوط موازی و مورب در شکل خواهیم داشت که X و Y دو زاویه مجاور به رأس 90° می‌باشند که جمع هر سه برابر 36° است. پس:



$$X + Y + 90^\circ = 36^\circ$$

$$X + Y = 27^\circ$$

(مبیر منشوری)

۱۴۲. گزینه ۳؛ تمامی اعداد را چهار رقمی فرض می‌کنیم، مثلاً $13 \leftarrow 13 \leftarrow 0 \leftarrow 0$ ردیف اول

در این صورت دو رقم سمت چپ هر عددی، به شماره ردیف آن عدد ربط دارد:

$$304 \leftarrow 304 \leftarrow 03 \leftarrow 03 \leftarrow 5149 \leftarrow 51 \leftarrow 51$$

هم‌چنین دو رقم سمت راست هر عددی، برابر با شماره ستون آن عدد است:

$$7 \leftarrow 7 \leftarrow 0007 \leftarrow 07 \leftarrow 3671 \leftarrow 71 \leftarrow 71$$

حال فرض می‌کنیم نقطه P نقطه وسط Q و R (پاره خط QR) باشد در این صورت عدد روی P برابر با میانگین عددهای روی Q و R خواهد بود. (چرا؟)

$$\frac{X + 3671}{2} = 5149 \Rightarrow X + 3671 = 10298 \Rightarrow X = 6627$$

(کیان کریمی فراسانی)

۱۴۳. گزینه ۵؛ اعداد روی کارت‌ها، دوه‌دو، مجموعشان 150 است به‌غیر از 75 که در وسط قرار می‌گیرد:

$$5 + 145 = 150 \text{ و } 10 + 140 = 150 \text{ و } 15 + 135 = 150 \text{ و } \dots$$

به این ترتیب ۱۴ جفت عدد داریم اگر خیلی بدشانس باشیم و از هر جفت، یک عدد را برداریم و پانزدهمین کارتی که برمی‌داریم 75 باشد هنوز نتوانسته‌ایم دو عدد که مجموعشان 150 باشد برداریم اما با برداشتن کارت شانزدهم حتماً یک جفت عدد که مجموعشان 150 باشد را در اختیار خواهیم داشت.

(فسین باطنی)

۱۴۴. گزینه ۲؛ عدد ۳ یکان حاصل ضرب عددهای \overline{ab} و \overline{ba} است. بنابراین یکان حاصل ضرب a و b نیز هست. رقم ۳ تنها در یکان دو عدد در جدول ضرب دیده می‌شود: $1 \times 3 = 3$ و $7 \times 9 = 63$ پس a و b یا دو رقم ۱ و ۳ هستند یا دو رقم ۷ و ۹.

با توجه به شرایط مسأله تنها ۷ و ۹ می‌تواند به جای a و b قرار بگیرد و حاصل ضرب \overline{ab} و \overline{ba} برابر $79 \times 97 = 7663$ است.

(زهره بندی)

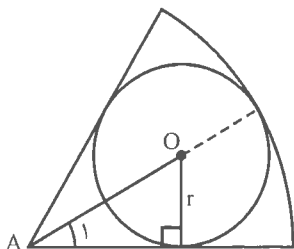
حاصل تفریق آن‌ها برابر $97 - 79 = 18$ است.

۱۴۵. گزینه ۲؛ $\frac{2}{9}$ مساحت مربع با $\frac{1}{14}$ مساحت دایره برابر است. اگر اندازه ضلع مربع را a و شعاع دایره را R در نظر بگیریم، داریم:

$$\frac{2}{9} a^2 = \frac{1}{14} \pi R^2 \Rightarrow 4a^2 = \pi R^2 \Rightarrow \frac{a^2}{R^2} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{a}{R} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

(فسین باطنی)

۱۴۶. گزینه ۳؛ عدد روی ورقه جدا شده، ۱ یا ۵ یا ۹ یا ...، یا $4k+1$ و عدد پشت آن ۳ یا ۷ یا ۱۱ یا ...، یا $4k+3$ می‌باشد و مجموع دو عدد برابر خواهد بود با $4 = 1+3$ یا $12 = 5+7$ یا $20 = 9+11$ یا ... یا $4k+3 + 4k+1 = 8k+4$ عبارت $8k+4$ را می‌توان به صورت $4(2k+1)$ نوشت، یعنی عدد حاصل، مضرب فرد عدد ۴ است. در بین اعداد گزینه‌ها فقط عدد ۹۲ مضرب فرد ۴ است زیرا: $92 = 4 \times 23$



۱۴۷. گزینه ۲؛ با توجه به شکل داریم زاویه $A_1 = 30^\circ$

زیرا $|AO| = 2r \leftarrow R = r + |AO|$ در نتیجه A_1 برابر با 30° درجه است.

پس $A = 60^\circ$ و در نتیجه مساحت قطاع دایره به شعاع R برابر است با: $\frac{\pi R^2}{6}$ و مساحت دایره کوچک برابر است با: πr^2

$$\Rightarrow \frac{9\pi r^2}{6} - \pi r^2 = \frac{1}{2}\pi r^2$$

$$\frac{\pi(3r)^2}{6} - \pi r^2$$

پس نسبت مساحت هاشور خورده به کل برابر است با:

$$\frac{\frac{1}{2}\pi r^2}{\frac{\pi(3r)^2}{6}} = \frac{1}{3}$$

(همید کاملی)

۱۴۸. گزینه ۵؛ به وضوح همه آن‌ها دروغگو نیستند، زیرا اگر این‌گونه باشد ادعای همه آن‌ها جمله‌ای راست می‌شود. پس حداقل یک راستگو بین آن‌ها وجود دارد. حال طبق ادعای آن شخص راستگو، باید حداقل ۹ دروغگو بین آن‌ها وجود داشته باشد، از طرفی اگر ادعای یکی از آن دروغگوها را در نظر بگیریم، متوجه می‌شویم از بین ۱۷ نفر بقیه، حداقل ۹ راستگو وجود دارد. چون حداقل ۹ دروغگو و حداقل ۹ راستگو بین آن‌ها وجود دارد و نیز این‌که تعدادشان ۱۸ نفر است، متوجه می‌شویم که تعداد دروغگوها ۹ نفر است.

(کیان کریمی فراسانی)

۱۴۹. گزینه ۲؛ عدد باید هم بر ۹ و هم بر ۵ بخش‌پذیر باشد تا بر ۴۵ بخش‌پذیر شود. پس رقم اول و آخر عدد مورد نظر ۵ است. رقم دهگان و صدگان هر چه باشند، ارقام ده‌هزارگان و هزارگان هم معلوم می‌شوند زیرا عدد باید متقارن شود.

$$5xyyx5$$

پس عدد مورد نظر به این صورت است.

به طوری که $10 + 2x + 2y$ باید بر ۹ بخش‌پذیر باشد و $0 \leq x \leq 9$ در دو حالت $x+y=4$ یا $x+y=13$ عدد $5xyyx5$ بر ۹ بخش‌پذیر است. به ۵ حالت $x+y=4$ می‌شود.

$$\begin{cases} x=4 \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases} \quad \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=4 \end{cases}$$

به ۶ حالت $x+y=13$ می‌شود.

$$\begin{cases} x=4 \\ y=9 \end{cases} \quad \begin{cases} x=5 \\ y=8 \end{cases} \quad \begin{cases} x=6 \\ y=7 \end{cases} \quad \begin{cases} x=7 \\ y=6 \end{cases} \quad \begin{cases} x=8 \\ y=5 \end{cases} \quad \begin{cases} x=9 \\ y=4 \end{cases}$$

(همید کاملی)

پس تعداد اعداد متقارن ۶ رقمی که بر ۴۵ بخش‌پذیرند برابر است با: $5+6=11$

۱۵۰. گزینه ۵؛ ابتدا به رقم یکان توجه می‌کنیم:



رقم یکان در ثانیه دوم فقط می‌تواند \square ، \square یا \square باشد و رقم یکان در ثانیه اول فقط می‌تواند \square ، \square ، \square یا \square باشد.

با توجه به متوالی بودن آن‌ها می‌فهمیم که در ثانیه اول \square و در ثانیه بعدی \square می‌شود. با توجه به تبدیل ۹ به ۰ در رقم یکان متوجه می‌شویم که رقم‌های دهگان هم باید متوالی باشند. که همانند روشی که در رقم یکان در پیش

گرفتیم عدد مشخص می‌شود:



(کیان کریمی فراسانی)

که پاسخ مسأله می‌شود $10 = 13 - 3$

۱۵۱. گزینه ۲؛ از آن‌جا که A کوچک‌ترین مقدار ممکن باید باشد می‌توانیم A را به صورت $5^c \times 3^b \times 2^a$ در نظر بگیریم و عامل‌های دیگری غیر از ۲، ۳ و ۵ را در آن قرار ندهیم.

وقتی عدد A را در ۲ ضرب می‌کنیم توان‌های ۳ و ۵ تغییر نمی‌کنند و چون عدد حاصل باید مربع کامل باشد پس b و c باید هر دو مضرب ۲ باشند. به همین ترتیب باید a و c مضرب ۳ باشند و b و a باید هر دو مضرب ۵ باشند.

۱- a هم مضرب ۳ است و هم مضرب ۵ پس a مضرب ۱۵ است: ... یا ۴۵ یا ۳۰ یا ۱۵ $a =$

اما اگر ۱ واحد به a اضافه شود عدد حاصل باید زوج شود پس کوچک‌ترین مقدار a برابر است با ۱۵.

۲- b هم مضرب ۲ است و هم مضرب ۵ پس b مضرب ۱۰ است: ... یا ۳۰ یا ۲۰ یا ۱۰ $b =$

اما اگر ۱ واحد به b اضافه شود عدد حاصل باید مضرب ۳ شود پس کوچک‌ترین مقدار b برابر است با: ۲۰.

۳- c هم مضرب ۲ است و هم مضرب ۳ پس c مضرب ۶ است. ... یا ۲۴ یا ۱۸ یا ۱۲ یا ۶ $c =$

اما اگر ۱ واحد به c اضافه شود عدد حاصل باید مضرب ۵ شود پس کوچک‌ترین مقدار c برابر است با: ۲۴

در نتیجه:

$$A = 2^{15} \times 3^{20} \times 5^{24}$$

و مجموع توان‌ها برابر است با:

$$15 + 20 + 24 = 59$$

(حسن باطنی)

۱۵۲. گزینه ۲؛ یک دکامینو ۱۰ تا خانه دارد و یک مستطیل 2×6 تعداد ۱۲ تا خانه و این به منزله آن است که ۲ تا مربع از ۱۲ تا مربع مستطیل 2×6 را حذف کنیم. حال مربع حذف شده اول را با \times نشان می‌دهیم، در این صورت برای مربع حذف شده دوم تعداد حالات را می‌شماریم:

۱	۳	۵	۷	۹
\times	۲	۴	۶	۸

→ حالت ۱۰

		۲	۴
\times	۱	۳	۵

→ حالت ۵

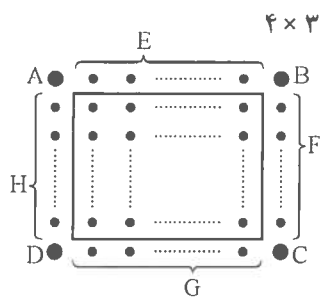
	\times	۱	

→ حالت ۱

$$10 + 5 + 1 = 16$$

(کیان کریمی فراسانی)

۱۵۳. گزینه ۵؛



۱- چهار دانش‌آموزی که در نقاط A، B، C و D ایستاده‌اند هر کدام با ۳ نفر دست می‌دهند. $4 \times 3 = 12$

۲- دانش‌آموزانی که در دسته‌های E، F، G و H ایستاده‌اند هر یک با ۵ نفر دست می‌دهند.

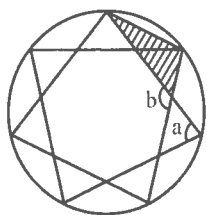
تعداد دانش‌آموزان هر یک از دسته‌های E و G، ۳۸ نفر و تعداد دانش‌آموزان هر یک از دسته‌های F و H، ۲۸ نفر می‌باشد. پس دانش‌آموزان این دسته‌ها در کل $(38 + 38 + 28 + 28) \times 5$ بار دست داده‌اند.

۳- دانش‌آموزانی که در مستطیل مشخص شده ایستاده‌اند هر یک با ۸ نفر دست می‌دهند. تعداد این دانش‌آموزان 28×38 نفر می‌باشد. پس این دانش‌آموزان $28 \times 38 \times 8$ بار دست داده‌اند.

در کل این دانش‌آموزان $28 \times 38 \times 8 + (38 + 38 + 28 + 28) \times 5 + 12$ بار دست داده‌اند. حاصل این عبارت ۹۱۸۴ می‌باشد. اما از آن‌جا که هر بار دست دادن را ۲ بار حساب کرده‌ایم. عمل دست دادن $9184 \div 2 = 4592$ بار انجام می‌گیرد.

(حسن باطنی)

۱۵۴. گزینه ۱؛ هر کمان $\frac{1}{7}$ کل دایره است.



زاویه محاطی a روبرو به ۳ کمان است: $a = \frac{3}{7} \times 36^\circ$

زاویه b هم زاویه خارجی مثلث هاشور خورده است و برابر مجموع دو زاویه دیگر این مثلث است:

$$b = \frac{1+4}{7} \times 36^\circ$$

پس نسبت اندازه زاویه a به b برابر $\frac{3}{5}$ است.

(زهرا پندی)

۱۵۵. گزینه ۵؛

$$(11 + (-7)) + \frac{1}{5} + 6 + \frac{4}{5} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + 4\right) = 11 \times 5 = 55$$

(کیان کریمی فراسانی)

(مرتضی فغانی ابری)

۱۵۶. گزینه ۵؛ با استفاده از الگویابی به این جواب می‌رسیم.

۱۵۷. گزینه ۴؛ جمعاً ۱۰۰ واحد کاری باید انجام شود:

۱۰۰ واحد کاری = ۱۰ نفر \times ۱۰ روز

روز دوم روز اول

$$\frac{10}{100} + \frac{9}{100} + \frac{8}{100} + \dots + \frac{1}{100} = \frac{10+9+8+\dots+1}{100} = \frac{55}{100}$$

(کیان کریمی فراسانی)

۱۵۸. گزینه ۲؛ خروجی به صورت $(x+1)^2(x+y)^2 + (x+2)^2 = 0$ است.

$$\Rightarrow x = -2 \text{ و } y = -x = -2 \Rightarrow x - y = -2 - 2 = -4$$

(مرتضی فغانی ابری)

$$2x^4y^7 + 2x^6y^2x^5 + 6x^{11}y^2 + x^4y^7 = 3x^4y^7 + 8x^{11}y^2$$

$$2 + 4 + 6 + 2 + 6 + 11 + 2 + 7 = 40$$

(مرتضی قشماهی ابری)

۱۶۰. گزینه ۳؛ اگر ۵ رنگ مختلف داشته باشیم، با برداشتن ۳ توپ مطمئن نیستیم که ۷ توپ هم‌رنگ داریم:

$$6 \times 5 = 30$$

چون می‌توان از هر رنگ ۶ توپ برداشت:

اما توپ ۳۱م هر رنگی که باشد، یک دسته ۷ تایی توپ هم‌رنگ درست می‌شود. پس n می‌تواند ۵ باشد.

اگر ۶ رنگ مختلف داشته باشیم، می‌توان $6 \times 6 = 36 = 36$ توپ برداشت که ۷ توپ هم‌رنگ بین آن‌ها نباشد، در این صورت قطعاً با برداشتن

۳۱ توپ مطمئن نیستیم ۷ تا هم‌رنگ در بین آن‌هاست. پس n نمی‌تواند ۶ یا بزرگ‌تر از آن باشد. بنابراین حداکثر مقدار ممکن برای n

همان ۵ است.

(عمیدرضا بیات)

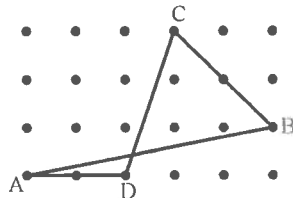
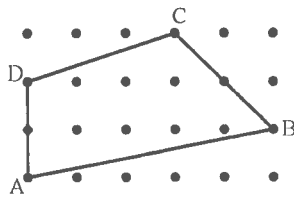
۱۶۱. گزینه ۲؛ با کمک گرفتن از قضیه فیثاغورث می‌توان به این نتایج رسید:

$$26 = 5^2 + 1^2 \quad 8 = 2^2 + 2^2 \quad 10 = 3^2 + 1^2$$

دقت کنید که عدد 2^2 را نمی‌توان به صورت مجموع مربع‌های دو عدد طبیعی نوشت پس پاره‌خط DA قطعاً موازی اضلاع شبکه است. با

بررسی حالات متفاوت و نیز استفاده از این نکته که عدد ۵ (در $26 = 5^2 + 1^2$) بزرگ‌تر از ۳ است می‌توان تنها دو حالت برای آن‌ها در

نظر گرفت:



که در هر دو حالت طول AC برابر می‌شود با:

$$AC = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18}$$

(کیان کریمی فراسانی)

۱۶۲. گزینه ۱؛ شعاع دایره بزرگ را r می‌نامیم و مساحت قسمت سایه خورده در هر شکل را حساب می‌کنیم.

$$\text{گزینه ۱: } 2 \times \left(\pi \left(\frac{r}{2}\right)^2\right) = \frac{\pi r^2}{2} = 1/57r^2$$

$$\text{گزینه ۲: } 3 \times \left(\frac{r \times \frac{\sqrt{3}}{2} r}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4} r^2 \approx 1/275r^2$$

$$\text{گزینه ۳: } (2r)^2 - \pi r^2 = (4 - \pi)r^2 \approx 0/86r^2$$

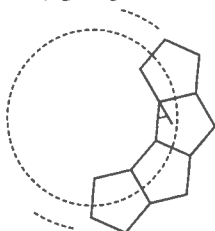
$$\text{گزینه ۴: } 2 \times \left(\frac{r^2}{4}\right) = r^2$$

$$\text{گزینه ۵: } \pi r^2 - (\sqrt{2}r)^2 = (\pi - 2)r^2 \approx 1/14r^2$$

(زهرا پندری)

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{PMK} + \widehat{PLK} = 118^\circ \\ \widehat{EPL} = \widehat{ELK} \Rightarrow \widehat{PEL} + \widehat{PLK} = 118^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \widehat{PMK} = \widehat{PEL} \\ \widehat{PMK} = 75^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{PEL} = 75^\circ$$

(هر تثنی فمائی ابری)



(زهرة پندی)

۱۶۴. گزینه ۲؛ هر زاویه پنج ضلعی منتظم 108° درجه است. با توجه به شکل، زاویه خارجی هر یک از رأس‌های چندضلعی‌ای که از کنار هم قرار گرفتن پنج ضلعی‌ها به دست می‌آید، $36^\circ = (108^\circ + 108^\circ) - 180^\circ$ است. مجموع زاویه‌های خارجی آن 36° درجه است. پس تعداد رأس‌های آن که برابر تعداد پنج ضلعی‌ها است، 10 تا است.

۱۶۵. گزینه ۵؛ می‌دانیم فقط یک نفر از آن‌ها راست‌گوست. پس سه حالت ممکن را بررسی می‌کنیم:

حالت اول: A راست‌گوست. در این صورت جمله «خسرو راست‌گوست» درست است و A خسرو است. از طرفی جمله «باقر سبیل دارد» غلط است و باقر سبیل ندارد. یعنی A باقر است. که غیرممکن است.

حالت دوم: B راست‌گوست. در این صورت جمله «کسی که راست‌گوست، سبیل دارد» غلط است و کسی که راست‌گوست، سبیل ندارد. پس A راست‌گوست. که غیرممکن است، چون فقط یک راست‌گو وجود دارد.

حالت سوم: C راست‌گوست. در این صورت جمله «باقر سبیل دارد» غلط است و باقر سبیل ندارد. پس A باقر است جمله «خسرو راست‌گوست» هم غلط است و خسرو دروغ‌گوست. پس B خسرو است. در نتیجه C ستار است.

۱۶۶. گزینه ۲؛ ابتدا ثابت می‌کنیم نمی‌توان مثبت‌ها و منفی‌ها را طوری تعیین کرد که حاصل صفر شود. پس نصف حالات، مجموع مثبت و

$$\frac{21^\circ}{2} = 512 \text{ پس جواب برابر است با: } 2$$

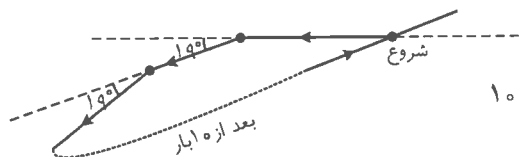
اثبات این که مجموع صفر نمی‌شود $\Leftarrow 1 + 2 + \dots + 10 = 55$

اگر علامت هر کدام از اعداد به منفی تغییر کند حاصل عبارت مقدار زوجی تغییر می‌کند و چون داریم: فرد = زوج - فرد

(عمید کاملی)

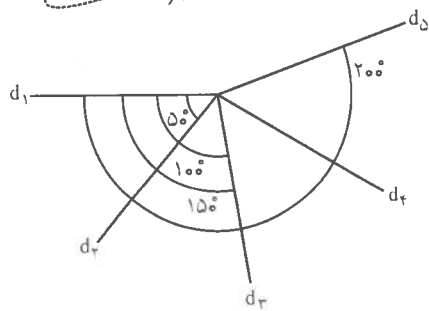
پس حاصل عبارت $10 \pm 9 \pm 8 \pm 7 \pm 6 \pm 5 \pm 4 \pm 3 \pm 2 \pm 1$ همیشه عددی فرد است و هیچ‌وقت برابر با عدد صفر نخواهد شد.

۱۶۷. گزینه ۱؛ کافی است مجموع تغییر جهت‌ها بیش‌تر از 180° درجه باشد تا بتوان ماشین را از نقطه شروع حرکتش عبور داد.

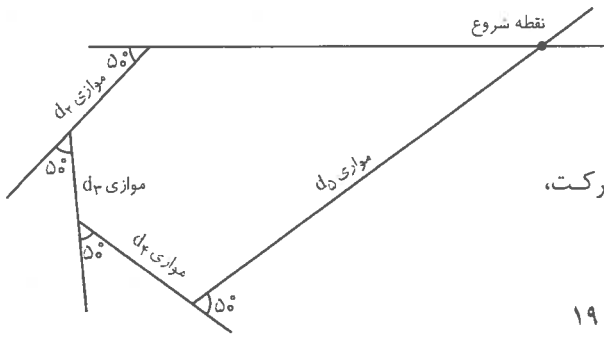


$$10 \times 19^\circ > 180^\circ$$

پس 10 بار زدن دکمه 19° کافی است.



اگر ماشین بیش‌تر از 180° بچرخد یعنی سر آن کاملاً چرخیده است پس می‌تواند با دقت در طول رانندگی از نقطه شروعش بگذرد. به مثال زیر توجه کنید. در این مثال ماشین می‌تواند هر بار 5° بچرخد.



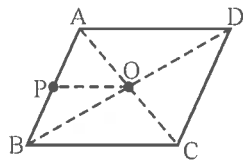
(عمیرضا زیارتی باهر)

با هربار چرخش به ترتیب مسیر حرکت موازی d_1 ، d_2 ، d_3 ، d_4 ، d_5 می‌شود و وقتی موازی d_5 شد ممکن است از نقطه شروع عبور کند.

به همین ترتیب ماشین مربوط به صورت سؤال پس از دست کم 10° حرکت، بیش‌تر از 18° چرخیده است پس می‌تواند از نقطه شروع بگذرد.

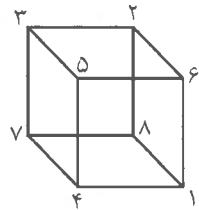
$$19 \times 10 > 180$$

۱۶۸. گزینه ۴؛ طبق شکل و طبق تشابه اگر P وسط ضلع AB باشد PO همواره طول ثابتی برابر $\frac{1}{2}BC$ خواهد داشت. پس نقطه



(فرقنده ترابی)

O حول نقطه P بر روی دایره‌ای به شعاع $\frac{1}{2}BC$ حرکت می‌کند.



(عمیرضا زیارتی باهر)

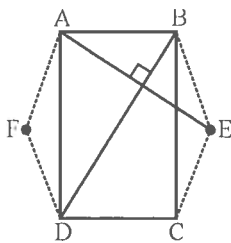
۱۶۹. گزینه ۴؛ فرض کنید کوچک‌ترین مجموع شامل ۴ عدد $a < b < c < d$ باشد.

اگر $c < 5$ باشد آن‌گاه $a + b + c < 10$ که خلاف فرض است پس حداقل مقدار C برابر ۵ و حداقل مقدار d برابر ۶ است. چون $a + b + c \geq 10$ باشد پس $a + b + c + d \geq 16$

۱۷۰. گزینه ۳؛ B روی عمودمنصف پاره خط AE قرار دارد در نتیجه $AB = BE$ نقطه F را قرینه نقطه E نسبت به محل برخورد قطرها قرار می‌دهیم، که نتیجه خواهد داد:

$$AF = FD$$

و شکل حاصل شش‌ضلعی منتظم می‌گردد پس نسبت $\frac{AD}{AB} = \sqrt{3}$ به وجود خواهد آمد.



(فرقنده ترابی)

۱۷۱. گزینه ۳؛ ۴، ۶، ۸، ۱۰ و ۱۲ ضلعی را می‌توان ساخت. مجموع زاویه‌های خارجی هر چند ضلعی 360° درجه است. زاویه خارجی یک زاویه 90° درجه برابر 90° درجه و زاویه خارجی یک زاویه 150° درجه برابر 30° درجه است. اگر X تعداد زاویه‌های 90° درجه و Y تعداد زاویه‌های 150° درجه چندضلعی مورد نظر باشد، باید همه پاسخی‌های معادله $90X + 30Y = 360$ یا با ساده کردن آن، معادله $3X + Y = 12$ را بیابیم.

$$x = 4 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \text{چهارضلعی}$$

$$x = 3 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow \text{شش‌ضلعی}$$

$$x = 2 \Rightarrow y = 6 \Rightarrow \text{هشت‌ضلعی}$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 9 \Rightarrow \text{ده‌ضلعی}$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 12 \Rightarrow \text{دوازده‌ضلعی}$$

(زهره پتری)

۱۷۲. گزینه ۴؛ عددی دوزنقه‌ای است که بتوان آن را به صورت جمع چند عدد طبیعی متوالی نوشت:

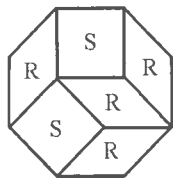
$$19 = 10 + 9$$

$$18 = 5 + 6 + 7$$

$$17 = 9 + 8$$

$$15 = 4 + 5 + 6 = 8 + 7$$

۱۸۰. گزینه ۲؛



(کیان کریمی، فراسانی)

۱۸۱. گزینه ۲؛ هر تیم با ۵ تیم دیگر بازی می‌کند. و با هر تیم ۴ بار به این ترتیب هر تیم ۲۰ بازی انجام می‌دهد، تعداد کل بازی‌ها برابر

است با: $\frac{6 \times 20}{2} = 60$ تعداد بردهای هر تیم را با نام آن تیم نشان می‌دهیم.

$$A + B + C + \dots + F = 60 \Rightarrow \frac{A + \dots + F}{20} = 3 \Rightarrow \frac{A}{20} + \dots + \frac{E}{20} + \frac{F}{20} = 3$$

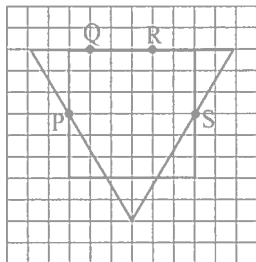
$$\Rightarrow \frac{20}{100} + \dots + \frac{80}{100} + \frac{F}{20} = 3 \Rightarrow \frac{F}{20} = \frac{75}{100}$$

(مهرتقی فغانی ابری)

تیم F با بردن ۷۵ درصد از بازی‌های خود مقام دوم را کسب کرده است.

۱۸۲. گزینه ۳؛ مرکز دایره باید به روی عمود منصف QR و PS قرار گیرد و از آنجا که این دو خط (عمود منصف‌ها) موازی یکدیگرند

(و نه منطبق) بنابراین مرکزی برای دایره یافت نمی‌شود. دو شکل دیگر به صورت زیر هستند.



(مهرقنده ترابی)

۱۸۳. گزینه ۱؛

$$n \times n = 576 \Rightarrow n^2 = 576 \Rightarrow n = \sqrt{576} = 24$$

(کیان کریمی، فراسانی)

۱۸۴. گزینه ۵؛

$$۱۲ + ۱۸ + ۱۴ + ۸ = ۵۲$$

$$۲ + ۱۰ + ۱۶ + ۲۴ = ۵۲$$

$$۳ + ۱۵ + ۲۳ + ۱۱ = ۵۲$$

$$۴ + ۶ + ۲۰ + ۲۲ = ۵۲$$

$$۱۹ + ۱۷ + ۷ + ۹ = ۵۲$$

(عمیدرضا بیات)

۱۸۵. گزینه ۳؛ اعداد خانه‌های C, D, E, F, G, H, I, J, K, L و L حتماً ۱۲ هستند. خانه B می‌تواند ۶ و ۱۲ باشد و خانه A می‌تواند هر کدام از مقسوم علیه‌های ۶ یعنی ۱, ۲, ۳ و ۶ باشد. در نهایت ۸ حالت ممکن است.

۱	A	۶	B
۱۲	C	D	E
F	G	H	I
J	K	L	۱۲

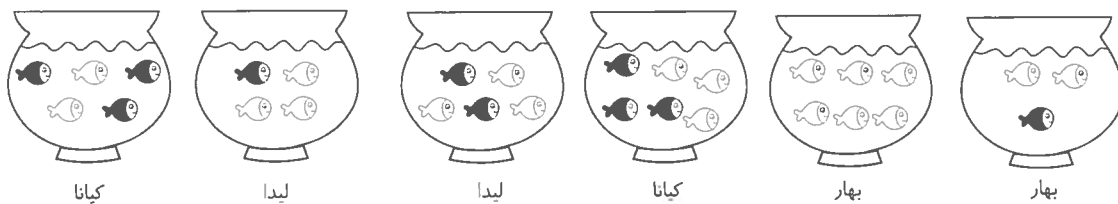
(مهرتقی قاضی ابری)

۱۸۶. گزینه ۳؛ تکه‌های الماس جدید ۳ و ۹ دسی گرم وزن دارند که با توجه به رابطه قیمت‌شان با مجذور وزنشان قیمت هر یک از تناسب مقابل به دست آید.

$$\frac{۷۲۰۰}{۱۴۴} = \frac{a}{۹} = \frac{b}{۸۱} \Rightarrow a = ۴۵۰, b = ۴۰۵ \Rightarrow ۷۲۰۰ - (۴۰۵ + ۴۵۰) = ۲۷۰۰$$

(فرقنده ترابی)

۱۸۷. گزینه ۳؛



(عمیدرضا بیات)

$$۷۷۷ \quad ۷۲$$

$$۷۷۷ \quad ۷۱$$

$$۷۷۷ \quad ۷۰$$

$$۷۷۷ \quad ۶۹$$

$$۷۷۷ \quad ۶۸$$

$$۷۷۷ \quad ۶۷$$

$$۷۷۷ \quad ۶۶$$

$$۷۷۷ \quad ۶۵$$

$$۷۷۷ \quad ۶۴$$

۱۸۸. گزینه ۱؛ ۵ تا از این ۹ عدد باید دارای ۳ رقم ۷ و ۴ عدد دیگر باید دارای ۴ رقم ۷ باشند:

$$۷۷۷ \quad ۶۸ \times ۹ = ۶۹۹۹۱۲$$

(عمیدرضا زیارتی باهر)

۱۸۹. گزینه ۴؛ هر ۹ عدد یک رقمی مربع خور هستند ولی برای اعداد دو رقمی باید داشته باشیم:

$$\overline{ab} - \overline{ba} = 9(a - b) = k^2 \Rightarrow \begin{cases} a - b = 9 \rightarrow a = 9, b = 0 \rightarrow \text{یک حالت} \\ a = b \rightarrow \text{حالت } 9: 11, 22, 33, 44, \dots, 99 \\ a - b = 4 \rightarrow \text{حالت} \\ a - b = 1 \rightarrow \text{حالت} \end{cases}$$

و برای اعداد سه رقمی:

$$\overline{abc} - \overline{cba} = 99a - 99c = 99(a - c) = k'^2 \Rightarrow a - c = 0 \Rightarrow a = c$$

برای پیدا کردن اعداد سه رقمی که دارای چنین ویژگی باشند باید تعداد سه رقمی که با مقلوبشان برابر هستند را پیدا کنیم. برای نوشتن رقم صدگان ۹ حالت و برای نوشتن رقم دهگان ۱۰ انتخاب و برای نوشتن رقم یکان یک انتخاب (برابر رقم صدگان) وجود دارد. پس ۹۰ عدد سه رقمی با چنین ویژگی وجود دارد.

$$\frac{9}{\text{رقم صدگان}} \times \frac{10}{\text{رقم دهگان}} \times \frac{1}{\text{رقم یکان}} = 90$$

(ممیدرضا زیارتی باهر)

پس پاسخ نهایی برابر است با: $9 + 25 + 90 = 109$

۱۹۰. گزینه ۳؛ مساحت کل مثلث 4×2^{10} است. فرض کنید در شکل صفرم، مساحت مثلث سفید 4×2^{10} باشد و در هر مرحله مساحت

آن $\frac{3}{4}$ برابر می‌شود.

$$4 \times 2^{10} \left(\frac{3}{4}\right)^n < 1 \Rightarrow \frac{2^{12}}{4^n} \times 3^n < 1 \Rightarrow 3^n \times 2^{12} < 4^n \Rightarrow 3^n < \frac{4^n}{2^{12}} \Rightarrow 3^n < \frac{4^n}{4^6} \Rightarrow 3^n < 4^{n-6}$$

(ممیدرضا زیارتی باهر)

(کیان کریمی فراسانی)

۱۹۱. گزینه ۴؛

۱۹۲. گزینه ۱؛ به نمونه زیر توجه کنید:

$$\frac{54321}{5432} = 10 + \frac{1}{5432}$$

(کیان کریمی فراسانی)

۱۹۳. گزینه ۲؛

$$(1+2-3) + (4+5-6) + (7+8-9) + \dots + (208+209-210) =$$

$$0 + 3 + 6 + \dots + 207 = 3(0 + 1 + 2 + \dots + 69) = 3 \times \frac{69 \times 70}{2} = 7245$$

(زهرا پندری)

۱۹۴. گزینه ۴؛ تمامی گزینه‌ها را می‌توان به صورت حاصل تفریق مجذور دو عدد طبیعی متوالی نوشت، مانند $7 - 4\sqrt{3} = \sqrt{49} - \sqrt{48}$

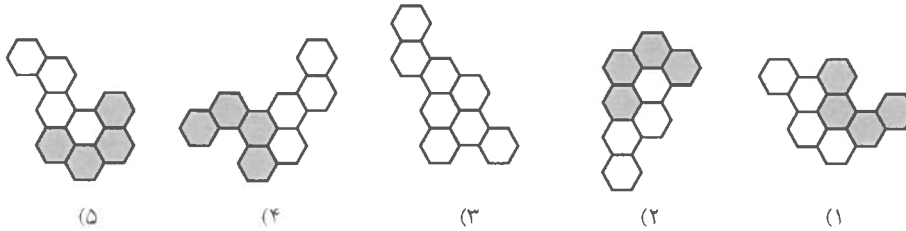
یا $9 - 4\sqrt{5} = \sqrt{81} - \sqrt{80}$ و ... و می‌دانیم $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = n+1 - n = 1$ پس هر چه مقدار $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$

بزرگ‌تر باشد، حاصل $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ کوچک‌تر است. که در گزینه ۴ مقدار n بزرگ‌تر و در نتیجه $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$ بزرگ‌تری یافت

(فرقنده ترابی)

می‌شود.

۱۹۵. گزینه ۳؛



(کیان کریمی فراسانی)

۱۹۶. گزینه ۱؛ گزینه‌های دیگر مانند:



(فرزنده ترابی)

۱۹۷. گزینه ۲؛ اگر 13931394 را برابر با x فرض کنیم، داریم:

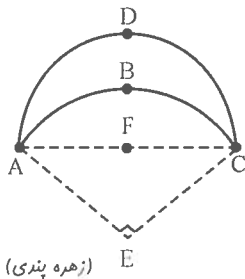
$$M = (x + 8)(x + 7), N = (x + 6)(x + 9)$$

$$M = x^2 + 15x + 56, N = x^2 + 15x + 54$$

$$M - N = 2$$

(کیان کریمی فراسانی)

۱۹۸. گزینه ۵؛ E و F به ترتیب مرکز دایره‌های مربوط به کمان‌های ABC و ADC هستند.



(زهره پندی)

$$FC = 9 \Rightarrow \text{مساحت نیم‌دایره} = \frac{9^2 \pi}{2}$$

$$\text{مساحت ربع دایره} = \frac{(9\sqrt{2})^2 \pi}{4} \quad \text{مساحت مثلث AEC} = \frac{(9\sqrt{2})^2}{2}$$

$$\Rightarrow \text{مساحت ربع دایره} - \text{مساحت مثلث} + \text{مساحت نیم‌دایره} = \text{مساحت مورد نظر} = 81$$

۱۹۹. گزینه ۳؛ به نفر اول به ۵ روش، به نفر دوم به ۴ روش، به نفر سوم به ۳ روش و ... می‌توان کتاب داد، پس کل حالت‌های مطلوب

ارائه کتاب به دانش آموزان عبارتست از $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$ و تنها یک حالت مطلوب وجود دارد که هر ۵ نفر کتاب‌های خود را دریافت کنند،

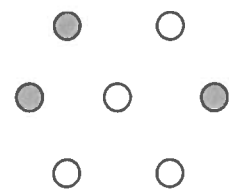
پس:

$$\frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد حالت‌های ممکن}} = \frac{1}{120}$$

(فرزنده ترابی)

۲۰۰. گزینه ۲؛ می‌توان فرض کرد که به جای چهارخانه، سه خانگی را رنگی کنیم. به وضوح خانه مرکزی نباید رنگی شود، حالت زیر، با

دوران یا تقارن محوری (بازتاب) ۱۲ حالت تولید می‌کند.



(کیان کریمی فراسانی)

گزینه ۲۰۱ (۱):

$$\begin{aligned} \sqrt{3} &= \text{ضلع مربع کوچک} \Rightarrow \sqrt{6} = \text{قطر مربع کوچک} \Rightarrow \text{ضلع مربع بزرگ} = 2\sqrt{6} + \sqrt{3} \\ \Rightarrow \text{مساحت مربع بزرگ} &= (2\sqrt{6} + \sqrt{3})^2 = (2\sqrt{6} + \sqrt{3})(2\sqrt{6} + \sqrt{3}) = 24 + 4\sqrt{3}\sqrt{6} + 3 = 27 + 12\sqrt{2} \\ \text{مساحت ۹ مربع کوچک} &= 27 \Rightarrow \text{مساحت قسمت هاشور خورده} = (27 + 12\sqrt{2}) - 27 = 12\sqrt{2} = \sqrt{288} \end{aligned}$$

(زهرة پندی)

گزینه ۲۰۲ (۱):

$$\begin{aligned} \triangle_{\sqrt{1}} + \triangle_{\sqrt{2}} + \triangle_{\sqrt{3}} &= 3 \times 1 & \triangle_{\sqrt{4}} + \dots + \triangle_{\sqrt{8}} &= (8-3) \times 2 \\ \triangle_{\sqrt{9}} + \dots + \triangle_{\sqrt{15}} &= (15-8) \times 3 & \triangle_{\sqrt{81}} + \dots + \triangle_{\sqrt{99}} &= (99-80) \times 9 \\ \triangle_{\sqrt{100}} &= 10 \Rightarrow \text{حاصل عبارت} & &= 3 \times 1 + 5 \times 2 + 7 \times 3 + \dots + 19 \times 9 + 10 = 625 \end{aligned}$$

(مرتضی فغامي ابري)

گزینه ۲۰۳ (۱): مطابق شکل برای $n = 6, 7, 8, \dots$ می توان این کار را انجام داد و از ۸ به بعد با اضافه کردن یک مثلث متساوی الاضلاع می توان به عدد بعدی رسید.

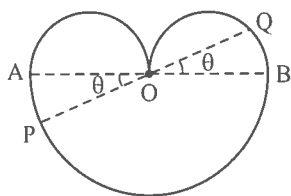


(همیدرضا زیارتی باهر)

گزینه ۲۰۴ (۲):

$$\left. \begin{aligned} \text{کمترین} &= \text{جمع عددهای قطر فرعی} = 1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 = 22 \\ \text{بیشترین} &= \text{جمع عددهای قطر اصلی} = 1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 = 288 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{جمع کل} = 310$$

(مرتضی فغامي ابري)



(مرفنده تراپي)

گزینه ۲۰۵ (۴): محیط نیم‌دایره‌ای کوچک برابر است با πR و محیط نیم‌دایره بزرگ برابر است با $2\pi R$ چون $R = 2r$ پس مجموع محیط دو نیم‌دایره کوچک با نیم‌دایره بزرگ برابر است.

$$\text{محیط } \widehat{BQ} \text{ برابر است با } \frac{\theta}{36^\circ} \times 2\pi R = \frac{\theta\pi}{9^\circ} \text{ و محیط } \widehat{AP} \text{ برابر است با } \frac{\theta}{36^\circ} \times 2\pi R = \frac{\theta\pi}{9^\circ}$$

بنابراین با افزایش θ نسبت دو محیط ثابت و برابر یک می‌ماند.

گزینه ۲۰۶ (۲): هر کدام از ۱۰ سنگ سبکتر به طور میانگین ۴٪ از وزن کل را تشکیل می‌دهند و هر کدام از ۵ سنگ سنگین‌تر به طور میانگین ۵٪ از وزن کل را تشکیل می‌دهند. $\frac{25}{5} = 5\%$ و $\frac{4}{10} = 4\%$ و ۳۵٪ وزن کل باقی مانده است.

$$4\% < \frac{35}{\square} < 5\%$$

(همیدرضا زیارتی باهر)

به جای مربع فقط عدد ۸ را می‌توان قرار داد. پس تعداد کل سنگ‌ها: $10 + 5 + 8 = 23$.

۲۰۷. گزینه ۴؛ کافی است جای ۴ عدد را روی خط‌کش مشخص کنیم (۱، ۳، ۷، ۱۱) پس داریم:



$$1 = 1 - 0 \quad 2 = 3 - 1 \quad 3 = 3 - 0 \quad 4 = 11 - 7$$

$$5 = 12 - 7 \quad 6 = 7 - 1 \quad 7 = 7 - 0 \quad 8 = 11 - 3$$

$$9 = 12 - 3 \quad 10 = 11 - 1 \quad 11 = 11 - 0 \quad 12 = 12 - 0$$

با مشخص کردن ۳ عدد یا کم‌تر نمی‌توان همه اندازه‌ها را محاسبه کرد. چون مشخص کردن ۳ عدد تنها ۱۰ فاصله بین آن‌ها ایجاد می‌کند که کافی نیست.

(عمیدرضا زیارتی باهر)

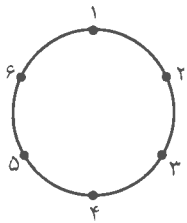
۲۰۸. گزینه ۳؛ تعداد مربع‌های 2×2 در یک جدول $(m+1) \times (n+1)$ برابر است با $m \times n$. تعداد مربع‌های 2×2 در یک جدول $m \times n$ برابر است با: $(m-1) \times (n-1)$.

$$m \times n - (m-1)(n-1) = 69 = m + n - 1 \Rightarrow m + n = 70$$

(کیان کریمی فراسانی)

۲۰۹. گزینه ۵؛ اگر فقط ۲ نقطه روی دایره بود ← تنها ۱ پاسخ

اگر ۴ نقطه روی دایره بود ← ۲ پاسخ



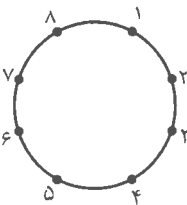
اگر ۱ به ۲ وصل می‌شد ← ۴ نقطه دیگر: ۲ پاسخ

اگر ۱ به ۴ وصل می‌شد ← ۱×۱ پاسخ

اگر ۱ به ۶ وصل می‌شد ← ۴ نقطه دیگر: ۲ پاسخ

اگر ۶ نقطه روی دایره بود ←

یعنی روی هم ۵ پاسخ



اگر ۱ به ۲ وصل می‌شد ← ۶ نقطه دیگر: ۵ پاسخ

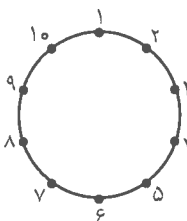
اگر ۱ به ۴ وصل می‌شد ← ۲×۱ پاسخ

اگر ۱ به ۶ وصل می‌شد ← ۱×۲ پاسخ

اگر ۱ به ۸ وصل می‌شد ← ۵ پاسخ

اگر ۸ نقطه روی دایره بود ←

یعنی روی هم ۱۴ پاسخ



اگر ۱ به ۲ وصل می‌شد ← ۱۴ پاسخ

اگر ۱ به ۴ وصل می‌شد ← ۵×۱ پاسخ

اگر ۱ به ۶ وصل می‌شد ← ۲×۲ پاسخ

اگر ۱ به ۸ وصل می‌شد ← ۱×۵ پاسخ

اگر ۱ به ۱۰ وصل می‌شد ← ۱۴ پاسخ

اگر ۱۰ نقطه روی دایره بود ←

یعنی روی هم ۴۲ حالت داریم.

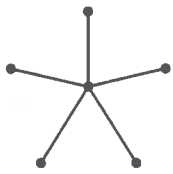
(زهرا پندی)

۲۱۰. گزینه ۴؛ ۵ جواب دارد:

$$\boxed{\boxed{a}} = 14 \left\{ \begin{array}{l} \boxed{a} = 28 \left\{ \begin{array}{l} a = 56 \begin{cases} a = 112 \\ a = 53 \end{cases} \\ a = 25 \begin{cases} a = 50 \\ a = 22 \end{cases} \end{array} \right. \text{غیرقابل قبول } a = 22 \rightarrow \boxed{a} = 11 \\ \boxed{a} = 11 \left\{ \begin{array}{l} a = 22 \begin{cases} a = 44 \\ a = 19 \end{cases} \\ a = 8 \text{ غیرقابل قبول } \Rightarrow \boxed{a} = 8 \Rightarrow \boxed{\boxed{a}} = 4 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

(**)

۵ جواب عبارتند از: ۱۱۲ و ۵۳ و ۵۰ و ۴۴ و ۱۹



۲۱۱. گزینه ۳؛ شهری که بیشترین خط هوایی را دارد در مرکز یک شش ضلعی منتظم قرار دهید و ۶ شهر دیگر را رأس‌های شش ضلعی در نظر بگیرید چون فاصله هیچ دو شهری یکسان نیست پس مرکز شش ضلعی نمی‌تواند نزدیک‌ترین شهر به هر شش شهر باشد. حال مرکز یک پنج‌ضلعی منتظم را در نظر بگیرید و ۵ شهر را در رأس‌های آن قرار دهید. اگر فاصله رأس‌ها را تا مرکز نسبت به هم مقداری کاهش دهید به پاسخ مسئله دست پیدا می‌کنید. بنابراین شهری که در مرکز قرار دارد می‌تواند به ۵ آن شهر با فاصله‌های متمایز وصل شود.

در حالتی که شهر در مرکز شش ضلعی یا بیش‌تر از آن باشد شهرهایی که روی محیط دایره قرار می‌گیرند به هم نزدیک می‌شوند و نمی‌توانند به شهری که در مرکز قرار گرفته وصل شوند.

(عمیدرضا زیارتی باهر)

۲۱۲. گزینه ۱؛ مساحت یک هشت‌ضلعی منتظم به قطر $2a$ می‌شود $8 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times a^2 \times \frac{1}{2}$ حال اگر طول قطر هشت‌ضلعی $2a$ باشد، طول قطر مربع $4a$ می‌شود. نسبت به مساحت ناحیه رنگی به مساحت مربع می‌شود:

$$\frac{2 \times 8 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times a^2 \times \frac{1}{2}}{8a^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(کیان کریمی فراسانی)

۲۱۳. گزینه ۱؛

$$a, b, b - a, -a, -b, -b + a, a, b$$

همان‌طور که می‌بینید عددهای این دنباله هر ۶ بار تکرار می‌شوند. مجموع این ۶ عدد برابر صفر است. باقی‌مانده تقسیم 1393 بر ۶ برابر ۱ است. پس مجموع 1393 عدد اول این دنباله برابر a است. پس $15 = 20 = a$. از طرفی باقی‌مانده تقسیم 15 بر ۶ برابر ۵ است. پس مجموع $15 = 20$ عدد اول این دنباله $b - a = b - a + (-a) + (-b) + (b - a) + a = a + b$ است. پس:

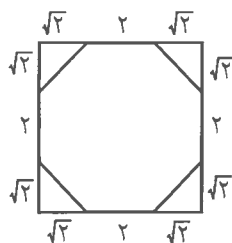
$$b - a = 1393 \Rightarrow b = 1393 + 20 = 15 = 3408$$

باقی‌مانده 850 بر ۶ برابر ۴ است. پس مجموع 850 عدد اول این دنباله برابر است با:

$$a + b + (b - a) + (-a) = 2b - a = 2 \times 3408 - 20 = 15 = 4801$$

(عمیدرضا زیارتی باهر)

۲۱۴. گزینه ۵؛ مساحت هشت ضلعی به طول ۲، با توجه به شکل می‌شود:

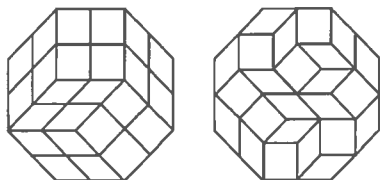


$$(2 + 2\sqrt{2})^2 - 4 \times \frac{\sqrt{2}^2}{2} = (2 + 2\sqrt{2})^2 - 4 = 8 + 8\sqrt{2}$$

از طرفی مساحت S برابر ۱ و مساحت R برابر $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (چرا؟)

$$x.S + y.R = 8 + 8\sqrt{2} \Rightarrow x = 8, y = 16$$

حال کافی است چند مثال ارائه کنیم که در همه آن‌ها، تعداد مربع‌ها ۸ تا و تعداد لوزی‌ها ۱۶ تا می‌شود.



(کیان کریمی فراسانی)

۲۱۵. گزینه ۳؛

$$P = 2^6 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19$$

فقط بر ۸ و ۱۶ بخش پذیر نیست. $P_1 = \frac{P}{2^2}$

فقط بر ۹ و ۱۸ بخش پذیر نیست. $P_2 = \frac{P}{3}$

فقط بر ۷ و ۱۴ بخش پذیر نیست. $P_3 = \frac{P}{7}$

$$P_1 = \frac{P}{\alpha \cdot \beta}, \alpha \neq \beta, \alpha, \beta \in \{2, 11, 13, 17, 19\}$$

چون به ۱۰ طریق می‌توان دو عضو از مجموعه $\{2, 11, 13, 17, 19\}$ انتخاب کرد. پس در مجموع P، ۱۳ مقسوم‌علیه دارد که فقط بر ۱۸ تا از اعداد ۱ تا ۲۰ بخش پذیر هستند.

(همیدرشنا زیارتی باهر)

۲۱۶. گزینه ۴؛ برای عددهای طبیعی a و b

گزینه ۱) $a + b > a, a - b < a$ گزینه ۲) $a - b < a, ab \geq a$

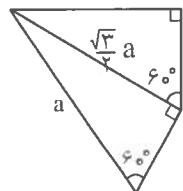
گزینه ۳) $a + b > a, \frac{a}{b} \leq a$ گزینه ۴) برای $a = 4$ و $b = 2$ درست است.

گزینه ۵) $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$

(فخرننده ترابی)

۲۱۷. گزینه ۵؛ دو مثلث متوالی متشابه‌اند و نسبت تشابه آن‌ها با توجه به شکل زیر $\frac{\sqrt{3}}{2}$ است. مثلث‌های دوازدهم و چهارم نیز متشابه‌اند

و نسبت تشابه آن‌ها $(\frac{\sqrt{3}}{2})^{12-4}$ است. می‌دانیم نسبت تشابه دو شکل با نسبت محیط‌های آن‌ها برابر است پس نسبت محیط آن‌ها نیز



$$81 + 256 = 337$$

$$(\frac{\sqrt{3}}{2})^{12-4} = \frac{81}{256}$$

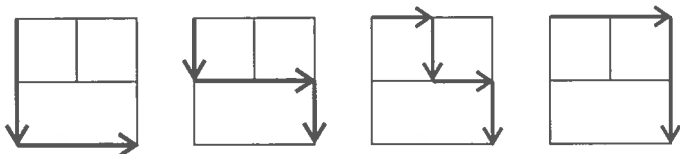
(زهره پندی)

۲۱۸. گزینه ۱؛

$$۱۳۹۴ = ۴۱ \times ۳۴$$

(زهرة پندری)

۲۱۹. گزینه ۴؛



(زهرة پندری)

۲۲۰. گزینه ۴؛

$$\frac{۱۳۹۴}{۱+۳+۹+۴} = \frac{۱۳۹۴}{۱۷} = ۸۲$$

(کیان کریمی فراسانی)

۲۲۱. گزینه ۴؛ عددهای ۰، ۲، ۵، ۸ مرکز تقارن دارند.



مرکز تقارن
است

(زهرة پندری)

$$\boxed{a} \times \boxed{a} = \boxed{a^2} \times a^2 = a^4 \times a^2 = a^6$$

۲۲۲. گزینه ۳؛

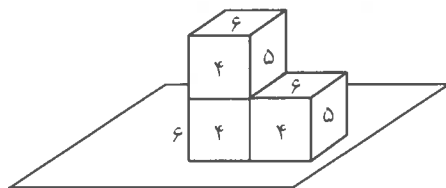
(عمیرضا زیارتی باهر)

۲۲۳. گزینه ۱؛ عددهای ۲، ۳، ۵، ۷ و ۱۱ کسل کننده هستند. هیچ کدام از عددهای ۳۷، ۳، ۱۱۱ و ۱۱۱۱ = ۱۱ × ۱۰۱ اول نیستند.

همچنین هر عدد به شکل \overline{aa} ، \overline{aaa} و \overline{aaaa} به ترتیب مضرب ۱۱، ۱۱۱ و ۱۱۱۱ هستند و اول نیستند.

(زهرة پندری)

۲۲۴. گزینه ۲؛ کمترین عددها را در وجه‌های پنهان قرار می‌دهیم. پاسخ به این شکل است:



$$(۶+۵+۲+۴+۳) + (۶+۵+۴+۳) + (۶+۴+۳) = ۲۰+۱۸+۱۳ = ۵۱$$

(قهرقنده ترابی)

۲۲۵. گزینه ۲؛ روش اول: $n+6$

$$(3n+5) - (2n-2) - 1 = 3n+5 - 2n+2 - 1 = n+6$$

روش دوم: می‌توانستید این سؤال را از راه عددگذاری هم حل کنید. برای مثال اگر به جای n عدد یک قرار دهید، عددهای

(عمیرضا زیارتی باهر)

۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ حاصل می‌شوند.

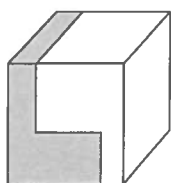
۲۲۶. گزینه ۴؛ ۱۰۰ عدد ۰، ۱، ۲، ...، ۹۹ را در نظر بگیرید. از میان این عددها ۱۰ تا یکان و دهگان مساوی دارند:

۰۰، ۱۱، ۲۲، ۳۳، ۴۴، ۵۵، ۶۶، ۷۷، ۸۸، ۹۹. پس ۹۰ عدد باقی می‌ماند که دوبه‌دو عکس هم‌اند! مثل (۲، ۰۲) یا (۵۴، ۴۵). از هر جفت عدد که عکس هم

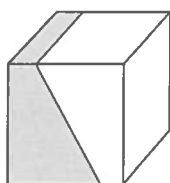
(زهرة پندری)

هستند، یکی «پرده» است! پس تعداد عددهای پرده برابر است با $۹۰ \div ۲ = ۴۵$.

۲۲۷. گزینه ۵؛ هر برش صاف که از مرکز مکعب می‌گذرد آن را به دو بخش کاملاً یکسان تقسیم می‌کند (شکل ۱). بی‌شمار از این نوع برش وجود دارد. علاوه بر این، برش‌های دیگری نیز وجود دارد که مکعب را به دو بخش کاملاً یکسان تقسیم کند. (شکل ۲).



شکل (۲)



شکل (۱)

(معمداً برش‌های افقی و عمودی)

۲۲۸. گزینه ۵؛

$$A = 3, B = 4, C = 2, D = 1 \Rightarrow A^B + B^C + C^D = 3^4 + 4^2 + 2^1 = 99$$

(معمداً برش‌های افقی و عمودی)

۲۲۹. گزینه ۲؛ تعداد مضرب‌های ۶ کمتر از ۵۰ برابر است با: ۸۳ (خروجی ماشین اول)، تعداد مضرب‌های ۶ کمتر از ۸۳ برابر است با: ۱۳ (خروجی نهایی)

۲۳۰. گزینه ۴؛ هر رقم ۶ بار در هر موقعیت دیده می‌شود. برای مثال رقم ۱، شش بار در عددهای ۱۲۳۴، ۱۲۳۴۱، ۱۲۳۴۱۲، ۱۲۳۴۱۲۳، ۱۲۳۴۱۲۳۴، ۱۲۳۴۱۲۳۴۱، ۱۲۳۴۱۲۳۴۱۲، ۱۲۳۴۱۲۳۴۱۲۳، ۱۲۳۴۱۲۳۴۱۲۳۴ دیده می‌شود!

پس حاصل جمع همه هزارگان‌ها $6 \times (1 + 2 + 3 + 4) = 60$ است. همین‌طور حاصل جمع همه صدگان‌ها، دهگان‌ها و یکان‌ها نیز ۶۰ می‌باشد.

پس حاصل جمع همه عددها برابر است با: $60 \times (1 + 10 + 100 + 1000) = 66660$.

(زهره پندی)

۲۳۱. گزینه ۲؛ سعی می‌کنیم با مجموع سه رقم، رقم چهارم را بسازیم:

$$9 = 6 + 2 + 1 \quad 9 = 5 + 3 + 1 \quad 9 = 4 + 3 + 2$$

$$8 = 5 + 2 + 1 \quad 8 = 4 + 3 + 1$$

$$7 = 4 + 2 + 1 \quad 6 = 3 + 2 + 1$$

با داشتن چهار رقم متمایز می‌توان $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ عدد چهار رقمی مختلف ساخت. پس در کل $24 \times 7 = 168$ عدد چهار رقمی با این شرایط وجود دارد.

(عمیدرضا زیارتی باهر)

۲۳۲. گزینه ۴؛

$$a \div (b \div (c \div d)) = \frac{ac}{bd}$$

$$(a \div (b \div c)) \div d = \frac{ac}{bd}$$

$$(a \div b) \div (c \div d) = \frac{ad}{bc}$$

$$a \div ((b \div c) \div d) = \frac{acd}{b}$$

$$((a \div b) \div c) \div d = \frac{a}{bcd}$$

(عمیدرضا زیارتی باهر)

۲۳۳. گزینه ۲؛



می‌بینید که مجموع عددها پس از ۹ مرحله برابر $9 = 45$ است و در مرحله بعد دوباره به ۵ می‌رسیم. بنابراین مجموع عددها پس از ۱۹ مرحله برابر ۹۰، بعد از ۲۰ مرحله برابر ۹۵ و بعد از ۲۱ مرحله برابر ۱۰۳ خواهد بود.

(معمداً برش‌های افقی و عمودی)

۲۳۴. گزینه ۴؛

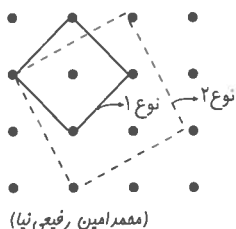
$$\overline{ab} \times \overline{cd} = \overline{ba} \times \overline{dc} \Rightarrow (10a + b)(10c + d) = (10b + a)(10d + c) \Rightarrow ac = bd$$

$$34 \times 86 = 43 \times 68$$

پس اگر یکی از عددها ۳۴ باشد، دیگری ۴۳ یا ۸۶ است.

(معمد امین رفیعی نیا)

۲۳۵. گزینه ۳؛ چهار مربع از نوع ۱ و دو مربع از نوع ۲ وجود دارد.



۲۳۶. گزینه ۳؛ با توجه به الگوی داده شده، متوجه می‌شویم:

عدد ۲ در ردیف ۲ قرار دارد.

عدد ۴ در ردیف ۳ قرار دارد.

عدد ۸ در ردیف ۴ قرار دارد.

عدد ۱۶ در ردیف ۵ قرار دارد.

:

پس عدد 2^n در ردیف $n+1$ قرار دارد و چون $2^{11} < 1394 < 2^{12}$ ، پس عدد ۱۳۹۴ در ردیف ۱۱ قرار دارد.

۲۳۷. گزینه ۲؛ فرض می‌کنیم خانواده‌ی آراد شامل x تا پسر، خانواده‌ی بهرام شامل y تا پسر و خانواده‌ی یاسین شامل z تا پسر باشد، پس داریم:

$$\begin{cases} y + z = 13 \\ x + z = 16 \Rightarrow 2x + 2y + 2z = 44 \Rightarrow x + y + z = 22 \Rightarrow x + (y + z) = x + 13 = 22 \Rightarrow x = 9 \\ x + y = 15 \end{cases}$$

(کیان کریمی فراسانی)

بنابراین خانواده‌ی آراد شامل ۹ تا پسر است و در نتیجه آراد ۸ تا برادر دارد.

۲۳۸. گزینه ۳؛

$$\begin{cases} \widehat{NBC} = 180^\circ - (6x^\circ + 4x^\circ) \\ \widehat{MCB} = 180^\circ - (5x^\circ + 5x^\circ) \end{cases} \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} = \frac{180^\circ - 3^\circ}{2} = 75^\circ$$

(عمیرشا زبارتی باهر)

$$5x + 6y = 14k$$

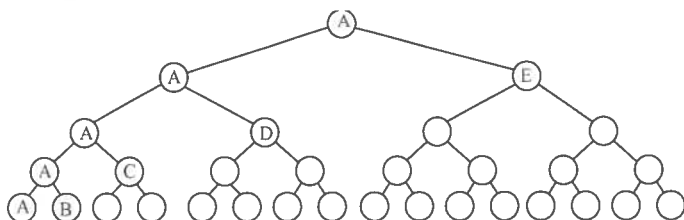
۲۳۹. گزینه ۲؛ فرض می‌کنیم در x روز، ۵ کارت و در y روز ۶ کارت علامت خورده باشد.

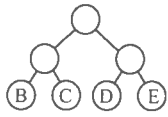
این معادله به ازای $k=1$ جواب ندارد، اما به ازای $k=2$ داریم:

$$5x + 6y = 28 \Rightarrow x = 2, y = 3 \text{ (روز ۵)}$$

(معمد امین رفیعی نیا)

۲۴۰. گزینه ۴؛





(عمیدرضا زیارتی باهر)

مطابق شکل با $1+2+4+8=15$ بار استفاده از ترازو، سنگین‌ترین سکه یعنی A پیدا می‌شود. سکه سنگین‌تر دوم می‌تواند هر کدام از سکه‌هایی که سنگین‌ترین سکه با آن‌ها مقایسه شده باشد یعنی B، C، D یا E. برای پیدا کردن سنگین‌ترین سکه بین این چهار سکه نیز به راحتی سه بار از ترازو استفاده می‌کنیم: $18=3+15$ ؛ گزینه ۱؛

شماره جعبه	۱	۲	۳	۴	۵	...	۱۱
توپ‌ها	۱	۲	۴	۸	۱۶	...	۱۰۲۴
		۳	۵	۹	۱۷	...	⋮
			۶	۱۰	⋮	...	⋮
			۷	⋮	⋮	...	۲۰۲۰

(عمیدرضا زیارتی باهر)

گزینه ۳؛

$$1 + 99 + 98 + 97 + \dots + 51 + 50 + 49 + \dots + 3 + 2 + 1 = 50 \times 50 = 2500$$

$$49 \times 1 + 50 = 50 \times 50$$

(کیان کریمی فراسانی)

گزینه ۱؛ نتیجه پرتاب دوم ارتباطی به پرتاب اول ندارد و احتمال آن که هر دو سکه «رو» بیاید همان $\frac{1}{4}$ است. (معمد امین رقیعی نیا)

گزینه ۱؛

ماه	فروردین	اردیبهشت	خرداد	تیر	مرداد	شهریور	مهر	آبان	آذر	دی	بهمن	اسفند
نسبت افزایش سود	$\frac{2}{1}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	—	$\frac{3}{3}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	—	—

همان‌طور که در جدول بالا مشاهده می‌کنید نسبت افزایش سود در فروردین ماه 20% است که از همه ماه‌های دیگر بیش‌تر است.

(زهرا پندی)

گزینه ۵؛

$$2016 = 21^6 \times 1016 = 21^6 \times 2^6 \times 1016 = 1024 \times 64 \times 1016 \approx 65000 \times 1016 = 65 \times 1016$$

(عمیدرضا زیارتی باهر)

بنابراین این عدد ۲۱ رقم دارد.

گزینه ۴؛

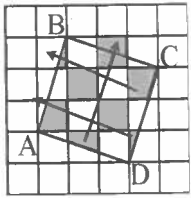
$$\text{عدد سوم} = 3X - 7, \quad \text{عدد دوم} = 2X + 1, \quad \text{عدد اول} = X$$

$$X + 2X + 1 + 3X - 7 = 3 \times 68 \Rightarrow 6X = 210 \Rightarrow X = 35$$

$$\text{عدد سوم} = 3 \times 35 - 7 = 98$$

(عمیدرضا زیارتی باهر)

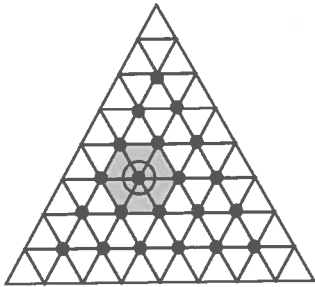
۲۴۷. گزینه ۴؛ به کمک انتقال می‌توان «تکه‌های ناقص» را در کنار هم قرار داد تا تشکیل مربع‌های کامل بدهند. بنابراین ۵ مربع کامل سفید داریم و ۵ مربع کامل سیاه.



(کیان کریمی فراسانی)

۲۴۸. گزینه ۱؛ تعداد شش ضلعی‌های منتظم به طول ضلع ۱ برابر است با تعداد نقطه‌های پررنگ، زیرا مرکز آن‌ها بر این نقطه‌ها منطبق است:

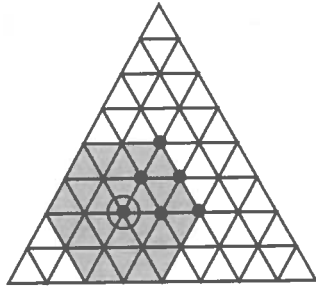
$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$$



تعداد شش ضلعی‌های منتظم به طول ضلع ۲ برابر است با تعداد نقطه‌های پررنگ:

$$1 + 2 + 3 = 6$$

همچنین شش ضلعی منتظم بزرگ‌تری نداریم، پس: $21 + 6 = 27$



(کیان کریمی فراسانی)

۲۴۹. گزینه ۲؛

$$\frac{7}{12} < \frac{a}{b} < \frac{3}{5}$$

$$\frac{35}{60} < \frac{a}{b} < \frac{36}{60}$$

$$\frac{71}{120}, \frac{59}{100}, \frac{58}{99}, \frac{17}{29}$$

(زهرة پندی)

پس b نمی‌تواند ۳۰ باشد. برای هر یک از گزینه‌های دیگر یک مثال آمده است:

۲۵۰. گزینه ۴؛ فرض می‌کنیم $t = 1394$. پس:

$$c = \frac{1}{t}, \quad b = \frac{t}{(t-1)(t+1)}, \quad a = \frac{1}{t+1}$$

به وضوح $a < b$ و $a < c$. اکنون باید ببینیم که b بزرگ‌تر است یا c :

$$\frac{1}{t} \circ \frac{t}{(t-1)(t+1)} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 1 \times (t-1)(t+1) \circ t \times t$$

$$t^2 - 1 \circ t^2 \Rightarrow t^2 - 1 < t^2 \Rightarrow \frac{1}{t} < \frac{t}{(t-1)(t+1)} \Rightarrow c < b$$

(فرشته ترابی)

پس $a < c < b$

۲۵۱. گزینه ۲؛

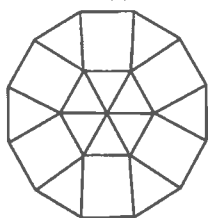
$$= 72^\circ = (6 - 2) \times 18^\circ = \text{مجموع زاویه‌های داخلی ۶ ضلعی}$$

بنابراین بدون توجه به اندازه تک تک زاویه‌های مرکزی دایره‌ها، می‌توان دریافت سطح رنگی به اندازه سطح دو دایره کامل است:

$$S = 2(\pi r^2) = 2\pi$$

(معمرا مین رفیعی‌نیا)

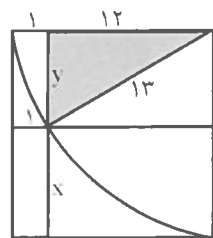
$$\frac{(12 - 2) \times 18^\circ}{12} = 15^\circ$$



(کیان کریمی‌فراسانی)

۲۵۲. گزینه ۲؛ اندازه هر زاویه رأس را در رأس‌ها به دست می‌آوریم:

با توجه به $15^\circ = 9^\circ + 6^\circ$ ، در هر رأس یک مربع و مثلث متساوی‌الاضلاع به هم می‌رسند. با توجه به شکل، ۱۲ مثلث متساوی‌الاضلاع و ۶ تا مربع داریم.



(معبیر منشوری)

۲۵۳. گزینه ۳؛ در مثلث خاکستری داریم:

$$13^2 = 12^2 + y^2 \Rightarrow 169 = 144 + y^2 \Rightarrow y^2 = 25 \\ \Rightarrow y = 5 \Rightarrow x = 13 - 5 = 8$$

۲۵۴. گزینه ۱؛

$$\frac{1 + 4 + 7 + \dots + (3n + 1)}{1 + 7 + 13 + \dots + (6n + 1)} = \frac{0 + 3 + 6 + \dots + 3n + (n + 1)}{0 + 6 + 12 + \dots + 6n + (n + 1)} = \frac{3(1 + 2 + \dots + n) + (n + 1)}{6(1 + 2 + \dots + n) + (n + 1)} = \frac{3 \times \frac{n(n + 1)}{2} + (n + 1)}{6 \times \frac{n(n + 1)}{2} + (n + 1)}$$

$$= \frac{\cancel{(n + 1)} \left(\frac{3n}{2} + 1 \right)}{\cancel{(n + 1)} \left(\frac{6n}{2} + 1 \right)} = \frac{3n + 2}{6n + 2} \Rightarrow \frac{3n + 2}{6n + 2} = \frac{13}{25} \Rightarrow n = 8$$

(معبیر رضا زیارتی‌باهر)

۱۲۳۴۵۶۷۸۹

۲۵۵. گزینه ۴؛ رقم‌های ۱ تا ۹ را به ترتیب می‌نویسیم:

برای ساختن یک عدد کمال طلب هفت رقمی نباید ترتیب رقم‌ها را تغییر دهیم، کافی است از میان ۹ رقم یکی را حذف کنیم و سپس از میان ۸ رقم باقی‌مانده یکی دیگر را حذف کنیم. مثلاً با حذف ۲ و ۵ یا ۵ و ۲ عدد ۱۳۴۶۷۸۹ ساخته می‌شود؛ پس $9 \times 8 = 72$ انتخاب داریم که هر دو تای آن‌ها یک عدد کمال طلب را می‌سازند، پس $72 \div 2 = 36$ عدد کمال طلب هفت رقمی می‌توان ساخت.

(زهرة پندی)

۲۵۶. گزینه ۴؛

$$S_1 = \pi(OA)^2$$

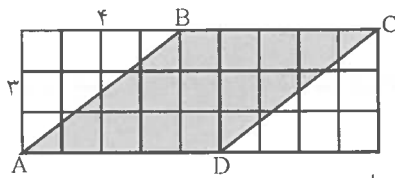
$$S_2 = \pi((OC)^2 - (OA)^2)$$

$$S_3 = \pi((OB)^2 - (OC)^2) = \pi(OA)^2$$

(زهرة پندی)

چون در مثلث قائم‌الزاویه OBC، OB وتر است و OC و BC = OA ضلع‌های زاویه قائمه می‌باشند.

۲۵۷. گزینه ۴؛ به وضوح بیشترین مساحت لوزی را وقتی داریم که قطر بزرگ لوزی بر قطر مستطیل منطبق شود.



اکنون باید نقطه D را طوری پیدا کنیم که $AB = CB$. در شکل، برای نقطه B داریم:

$$\begin{cases} AB^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow AB^2 = 9 + 16 \Rightarrow AB^2 = 25 \Rightarrow AB = 5 \\ BC = 5 \end{cases} \Rightarrow AB = BC$$

به شیوه مشابه داریم $CD = AD$ ، پس چهارضلعی ABCD لوزی است و بیشترین مساحت را دارد.

$$S_{ABCD} = 3 \times 9 - \frac{3 \times 4}{2} - \frac{3 \times 4}{2} = 27 - 6 - 6 = 27 - 12 = 15$$

(کیان کریمی، فراسانی)

۲۵۸. گزینه ۱؛ اگر در بین عددهای $n+1$ ، $n+2$ ، $n+3$ و $n+4$ عدد اول و توانی از یک عدد اول (مثل 5^2 یا 2^4 یا 3^3) وجود

نداشته باشد، آن گاه $S(n) = S(n+4)$.

اکنون عددهای اول و توان‌های عددهای اول را می‌نویسیم:

۲-۳-۴-۵-۷-۸-۹-۱۱-۱۳-۱۶-۱۷-۱۹-۲۳-۲۵-۲۷-۲۹-۳۱-۳۲-۳۷-۴۱-۴۳-۴۷-۴۹

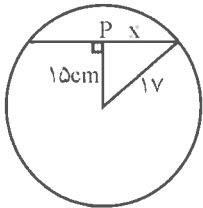
باید تفاضل بین دو عدد متوالی در دنباله بالا حداقل ۵ باشد که تنها بین ۳۲ و ۳۷ این وضعیت را داریم:

$$S(32) = S(36)$$

(فخرنده ترابی)

پس فقط $n = 32$ پاسخ مسئله است.

۲۵۹. گزینه ۵؛

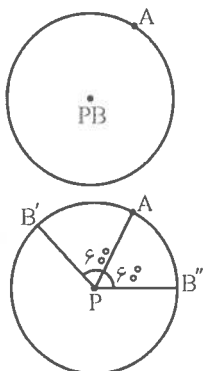


$$x^2 = 17^2 - 15^2 = 289 - 225 = 64 \Rightarrow x = 8 \text{ cm}$$

طول کوتاه‌ترین وتر ۱۶ و طول بلندترین وتر ۳۴ است. یک وتر به طول ۱۶ و یک وتر به طول ۳۴ داریم، ولی دو وتر با طول‌های ۱۷، ۱۸، ...، ۳۳ داریم.

$$(33 - 17 + 1) \times 2 + 2 = 36$$

(عمیدرضا زیارتی‌باهر)



(فخرنده ترابی)

۲۶۰. گزینه ۲؛ اگر پرهام، علی و بابک را با حروف P، A و B بنامیم. در ابتدا خواهیم داشت:

مکان A بر روی دایره‌ای به شعاع ۱۰ قرار دارد به مرکز B و P. پس از حرکت، B نیز بر روی دایره قرار می‌گیرد. در صورتی که A، P و B رأس‌های یک مثلث متساوی‌الاضلاع باشند، فاصله هر یک با دیگری برابر است.

اگر مکان B بر روی مکان $B'B''$ قرار گیرد، فاصله‌اش تا A کمتر از فاصله‌اش تا P

است که این کمان $\frac{1}{3}$ کل دایره می‌باشد.

۲۶۱. گزینه ۱؛ موریانه را در زمانی تصور کنید که به خانه شماره ۸ رسیده است. اکنون بسته به این که از خانه ۹ یا ۱۰ عبور کند

می‌تواند مجموع زوج یا فرد به دست آورد. یعنی به ازای هر مسیر منتهی به خانه ۸ یک مجموع زوج متناظر و یک مجموع فرد متناظر

(محمدامین رفیعی‌نیا)

وجود دارد. بنابراین احتمال آن که مجموع عددی فرد باشد، ۵۰٪ است.

۲۶۲. گزینه ۴؛ با توجه به عامل $۲^۲$ ، این حاصل ضرب بر ۴ بخش پذیر است ولی بر ۸ بخش پذیر نیست. پس باقی مانده ۴ است.

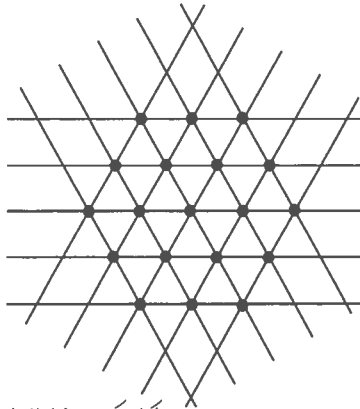
به عبارت دیگر:

$$۲^۲ \times \underbrace{۳^۳ \times ۵^۵ \times ۷^۷}_{\text{عددی فرد}} = ۴ \times (۲k + ۱) = ۸k + ۴$$

(مبیر منشوری)

پس باقی مانده تقسیم عدد بر ۸، مساوی ۴ خواهد شد.

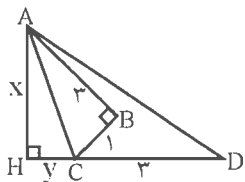
۲۶۳. گزینه ۲؛



$$\frac{\text{تعداد حالات های مطلوب}}{\text{تعداد کل حالت ها}} = \frac{\text{تعداد نقاط}}{۵ \times ۵ \times ۵} = \frac{۱۹}{۵^۳}$$

(کیان کریمی فراسانی)

۲۶۴. گزینه ۳؛



$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = ۳^۲ + ۱^۲ = ۱۰ \Rightarrow x^2 + y^2 = AC^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = ۱۰ \quad (I)$$

$$AH^2 + HD^2 = AD^2 \Rightarrow x^2 + (y+۳)^2 = ۵^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + ۶y + ۹ = ۲۵$$

$$x^2 + y^2 + ۶y + ۹ = ۲۵ \xrightarrow{(I)} ۱۰ + ۶y + ۹ = ۲۵ \Rightarrow ۶y = ۶ \Rightarrow y = ۱$$

$$x^2 + y^2 = ۱۰ \xrightarrow{y=1} x^2 + ۱ = ۱۰ \Rightarrow x^2 = ۹ \Rightarrow x = ۳$$

$$S_{ABCD} = S_{AHD} - S_{AHC} - S_{ABC} = \frac{۳ \times ۴}{۲} - \frac{۳ \times ۱}{۲} - \frac{۳ \times ۱}{۲} = ۳$$

(کیان کریمی فراسانی)

۲۶۵. گزینه ۳؛ عدد را به صورت \overline{abc} فرض می کنیم:

$$\overline{abc} = ۱۰ \cdot a + ۱۰ \cdot b + c = ۱۳(a + b + c) \Rightarrow ۱۰ \cdot a + ۱۰ \cdot b + c = ۱۳a + ۱۳b + ۱۳c$$

$$\Rightarrow ۸۷a = ۳b + ۱۲c \xrightarrow{\div 3} ۲۹a = b + ۴c$$

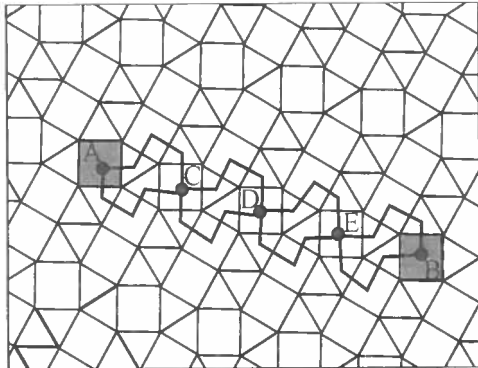
اگر $b = c = ۹$ ، آن گاه $b + ۴c = ۴۵$ می شود، در نتیجه مقدار a نمی تواند ۲ یا بیش تر باشد. پس $a = ۱$

$$۲۹ = b + ۴c \begin{cases} c=۱ \Rightarrow b=۲۵ \text{ غ ق ق} \\ c=۲ \Rightarrow b=۲۱ \text{ غ ق ق} \\ c=۳ \Rightarrow b=۱۷ \text{ غ ق ق} \\ c=۴ \Rightarrow b=۱۳ \text{ غ ق ق} \\ c=۵ \Rightarrow b=۹ \\ c=۶ \Rightarrow b=۵ \\ c=۷ \Rightarrow b=۱ \end{cases}$$

(عمیرضا بیات)

پس عددهای ۱۹۵، ۱۵۶ و ۱۱۷ پاسخ مسئله هستند.

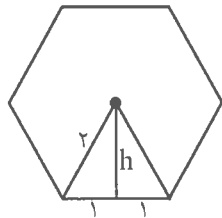
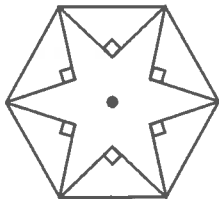
۲۶۶. گزینه ۲؛ از A به C و از C به D و از D به E و از E به B می‌توان به ۲ طریق رفت.



$$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$$

(کیان کریمی فراسانی)

۲۶۷. گزینه ۲؛ مساحت هر مربع ۲ است، پس طول قطر هر مربع ۲ است. اکنون مساحت یک شش ضلعی منتظم به طول ضلع ۲ را از مساحت شش مثلث کم می‌کنیم.

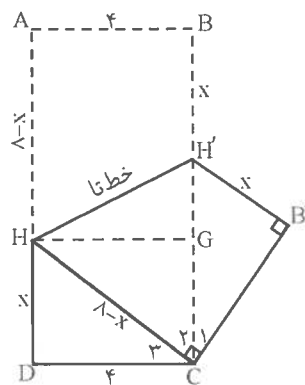


$$h^2 + 1^2 = 2^2 \Rightarrow h^2 = 3 \Rightarrow h = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{h \times 2}{2} = \frac{\sqrt{3} \times 2}{2} = \sqrt{3}$$

$$\text{مساحت شش ضلعی منتظم} = 6\sqrt{3} \Rightarrow \text{مساحت ستاره} = 6\sqrt{3} - \frac{6 \times 2}{2} = 6\sqrt{3} - 6$$

(کیان کریمی فراسانی)

۲۶۸. گزینه ۱؛ HD را برابر x در نظر گرفته‌ایم و طول‌ها را بر حسب x نوشته‌ایم.



$$\begin{cases} \hat{B}' = \hat{D} = 90^\circ \\ \overline{B'C} = \overline{CD} \text{ (عرض مستطیل)} \Rightarrow \triangle H'CB' \cong \triangle HCD \\ \hat{C}_1 = \hat{C}_3 = 90^\circ - \hat{C}_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overline{B'H'} = x \Rightarrow \overline{BH'} = x \Rightarrow \overline{H'G} = 8 - 2x$$

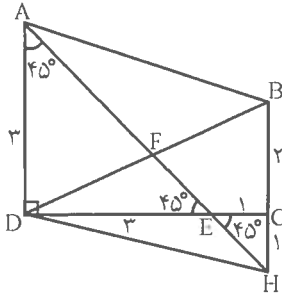
$$\triangle HDC: x^2 + 4^2 = (8 - x)^2 \Rightarrow x^2 + 16 = 64 + x^2 - 16x \Rightarrow 16x = 48$$

$$\Rightarrow x = 3 \Rightarrow \overline{H'G} = 8 - 2x = 2$$

$$\triangle HH'G: \overline{HH'}^2 = \overline{H'G}^2 + \overline{HG}^2 = 4 + 16 = 20 \Rightarrow \overline{HH'} = 2\sqrt{5}$$

(زهرا پندری)

۲۶۹. گزینه ۲؛ با توجه به امتداد BC و AE و این که دو مثلث ADE و HCE قائم الزاویه و متساوی الساقین هستند، متوجه می شویم که $AD = BH$ و $AD \parallel BH$. پس چهارضلعی ABHD متوازی الاضلاع است. در متوازی الاضلاع با رسم دو قطر، چهار مثلث هم مساحت به دست می آید.



$$S_{ABF} = \frac{1}{4} \times S_{ABHD} = \frac{1}{4} \times 4 \times 3 = 3$$

(کیان کریمی، فراسانی)

۲۷۰. گزینه ۲؛ در یک مستطیل $m \times n$:

$$\text{تعداد کل کاشی ها} = mn \quad \text{تعداد کاشی های دور تا دور} = 2m + 2n - 4$$

پس برای آن که تعداد کاشی های رنگی و سفید مساوی باشد، باید:

$$2m + 2n - 4 = \frac{mn}{2} \Rightarrow mn - 4m - 4n + 8 = 0 \Rightarrow (m - 4)(n - 4) = 8$$

پس $(m - 4)$ و $(n - 4)$ شمارنده ۸ هستند و حاصل ضرب آن ها هم ۸ است.

$$(m - 4)(n - 4) = 1 \times 8 \Rightarrow m = 5, n = 12$$

$$(m - 4)(n - 4) = 2 \times 4 \Rightarrow m = 6, n = 8$$

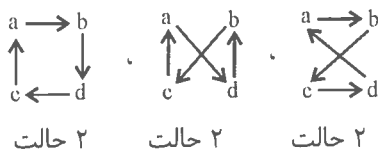
(زهره پندی)

پس تنها دو مستطیل 5×12 و 6×8 پاسخ مورد نظر سوال هستند.

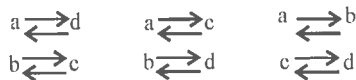
۲۷۱. گزینه ۱؛ هریک از چهار هفت تیرکش ۳ انتخاب برای شلیک دارد. پس در مجموع $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ حالت وجود دارد. فقط در

دو حالت زیر هر چهار نفر کشته می شوند:

حالت اول: افراد به صورت دایره ای یکدیگر را مورد هدف قرار دهند: شش حالت مختلف وجود دارد.



حالت دوم: افراد به صورت گروه های ۲ نفره یکدیگر را مورد هدف قرار دهند. برای این وضعیت ۳ حالت وجود دارد.



$$\frac{6 + 3}{81} = \frac{9}{81} = \frac{1}{9} \approx 11\%$$

(عمیررضا زیارتی، باهر)

۲۷۲. گزینه ۲):

$$\frac{1+2+3}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{1+2+3+4}{5} = 2$$

$$\frac{1+2+3+4+5}{6} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{1+2+3+4+5+6}{7} = 3$$

(کیان کریمی فراسانی)

$$20 + 29 = 49$$

۲۷۳. گزینه ۴):

$$35 + 29 = 64$$

(زهرة پندری)

۲۷۴. گزینه ۵): در نمای بالا و پایین این حجم هر کدام ۹ سطح و در نمای راست و چپ و جلو و عقب هر کدام ۶ سطح دیده می‌شوند.

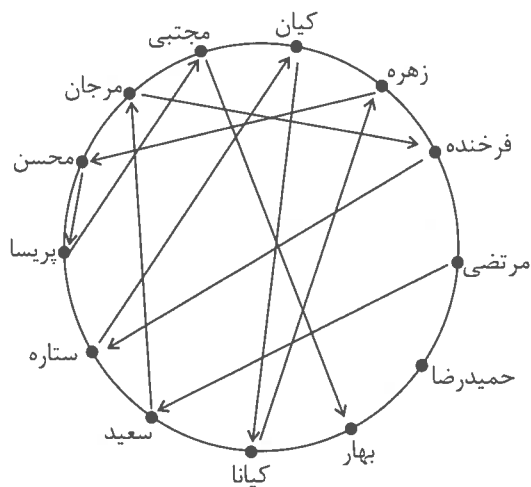
$$9 + 9 + 6 + 6 + 6 + 6 = 42$$

پس تعداد سطح‌هایی که دیده می‌شوند برابر است با:

دقیقاً همین سطح‌ها رنگی می‌شوند.

(امین رفیعی‌نیا)

۲۷۵. گزینه ۱):



(امین رفیعی‌نیا)

۲۷۶. گزینه ۲):

$$51 \rightarrow 1, 3, 17, 51 \rightarrow \text{مجموع} = 1 + 3 + 17 + 51 = 72$$

$$\text{حاصل ضرب} = 1 \times 3 \times 17 \times 51 = 2601$$

$$53 \rightarrow 1, 53 \rightarrow \text{مجموع} = 1 + 53 = 54$$

$$\text{حاصل ضرب} = 1 \times 53 = 53$$

(مهمدکل صفتان)

۲۷۷. گزینه ۱):

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{3}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{4}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{5}} \times \dots \times \frac{1}{1-\frac{1}{100}} = \frac{1}{1} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \dots \times \frac{1}{99} = \frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{4} \times \dots \times \frac{100}{99} = 100$$

(کیان کریمی فراسانی)

۲۷۸. گزینه ۱؛ از نامساوی روبه‌رو نتیجه می‌گیریم A، خانم است.

$$\frac{12}{17} < \frac{5}{7}$$

اگر هر دو از یک جنسیت باشند، مقدار هر دو کسر باید برابر شود. چون دو کسر با هم برابر نیستند نتیجه می‌گیریم که یکی آقا و یکی خانم است. چون A خانم است، نتیجه می‌گیریم B آقا است.

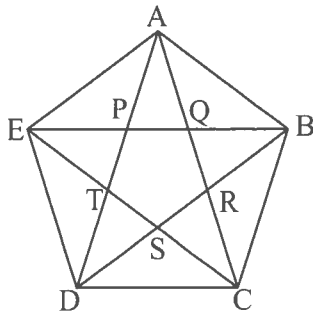
(عمیرشا زیارتی باهر)

۲۷۹. گزینه ۱؛ بیست عدد مورد نظر عبارت‌اند از:

$$-9, -8, -7, \dots, 7, 8, 9, 10$$

(زهرا پندی)

۲۸۰. گزینه ۲؛ با هر ضلع پنج‌ضلعی دو تا مثلث هم‌نهشت می‌توان دید.



BCS - BCQ - CDT - CDR - DEP - DES - EAT - EAQ - ABP - ABR

(کیان کریمی فراسانی)

۲۸۱. گزینه ۳؛ هر عدد سه تا عامل دارد، حاصل $[a, b]$ هم هر پنج عامل را دارد، پس چون $6 - 5 = 1$ است، حاصل (a, b) یک عامل دارد. پس از بین گزینه‌ها فقط عدد ۵ قابل قبول است.

(کیان کریمی فراسانی)

۲۸۲. گزینه ۳؛ به وضوح رقم ۰ نداریم. پس از ۱۱۱۱ شروع می‌کنیم:

$$1111 \Rightarrow \begin{cases} \text{مجموع} = 4 \\ \text{حاصل ضرب} = 1 \end{cases} \quad \times$$

$$1112 \Rightarrow \begin{cases} \text{مجموع} = 5 \\ \text{حاصل ضرب} = 2 \end{cases} \quad \times$$

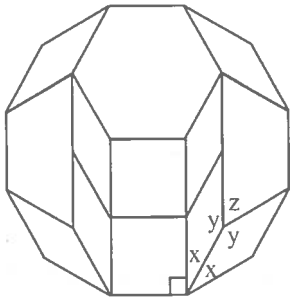
$$1113 \Rightarrow \begin{cases} \text{مجموع} = 6 \\ \text{حاصل ضرب} = 3 \end{cases} \quad \checkmark$$

(مهدا گل صفقانی)

۲۸۳. گزینه ۲؛ ابتدا سعی می‌کنیم تنها پلیس‌های کلانتری‌های دور شکل را به دست آوریم. ۶ خیابان کناری نیازمند ۳۶ «نظارت» است. با توجه به این که هر پلیس از ۲ خیابان محافظت می‌کند، بنابراین برای این کلانتری‌ها ۱۸ پلیس لازم است. در هر یک از کلانتری‌ها ۳ پلیس قرار می‌گیرد (در غیر این صورت برای کلانتری وسط به تعداد بیشتری پلیس نیاز خواهیم داشت)، حال کافی است ۳ پلیس هم در کلانتری وسط قرار خواهند گرفت؛ یعنی مجموعاً ۲۱ پلیس.

(مهدامین رفیعی‌نیا)

۲۸۴. گزینه ۳؛



$$\text{اندازه زاویه } ۱۲ \text{ ضلعی} = \frac{(۱۲-۲) \times ۱۸۰}{۱۲} = ۱۵۰^\circ$$

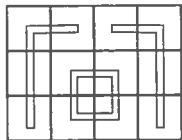
$$۲x + ۹^\circ = ۱۵۰^\circ \Rightarrow x = ۳^\circ$$

$$x + y = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۳^\circ + y = ۱۸۰^\circ \Rightarrow y = ۱۷۷^\circ$$

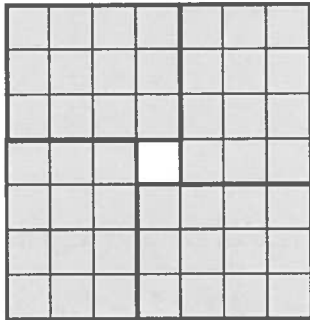
$$z + ۲y = ۳۶۰^\circ \Rightarrow z + ۲ \times ۱۷۷^\circ = ۳۶۰^\circ \Rightarrow z = ۶^\circ$$

(کیان کریمی فراسانی)

۲۸۵. گزینه ۴؛ هر مستطیل ۳×۴ را می‌توان با قطعات (۱) و (۲) کاملاً پوشاند.



همان‌طور که می‌بینید در شکل زیر ۴ مستطیل ۳×۴ دیده می‌شود، پس حداکثر ۱۲ قطعه می‌توان در شکل قرار داد.

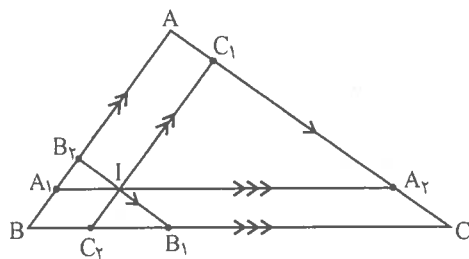


(معمد امین رفیعی‌نیا)

۲۸۶. گزینه ۴؛ ۹۵۳۱ این خروجی امکان‌پذیر نیست، چون یک تیم هر سه بازی خود را برده و ۹ امتیاز گرفته است. ولی تیمی که ۵ امتیاز دارد فقط می‌توانسته یک بازی خود را برده و ۲ بازی دیگر را مساوی کرده باشد و این با باخت به تیم ۹ امتیازی در تناقض است.

(معمد رضا زیارتی باهر)

۲۸۷. گزینه ۱؛



$$\text{محیط } \triangle (IB_2A_1) + \text{محیط } \triangle (IC_2B_1) + \text{محیط } \triangle (IA_2C_1) = \text{محیط } (ABC)$$

$$\Rightarrow ۲ + ۳ + \text{محیط } \triangle (IA_2C_1) = ۲۰ \Rightarrow \text{محیط } \triangle (IA_2C_1) = ۱۵$$

(مرتضی فغانی ابدی)

۲۸۸. گزینه ۴؛

$$\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 9$$

$$\sqrt{x} = 1 \Rightarrow \sqrt{y} = 4 \Rightarrow x = 1, y = 16 \Rightarrow xy = 16$$

$$\sqrt{x} = 3 \Rightarrow \sqrt{y} = 3 \Rightarrow x = 9, y = 9 \Rightarrow xy = 81$$

$$\sqrt{x} = 5 \Rightarrow \sqrt{y} = 2 \Rightarrow x = 25, y = 4 \Rightarrow xy = 100$$

$$\sqrt{x} = 7 \Rightarrow \sqrt{y} = 1 \Rightarrow x = 49, y = 1 \Rightarrow xy = 49$$

(مرتضی قمامی ابدی)

۲۸۹. گزینه ۳؛

$$214875 = 3^2 \times 5^3 \times 191$$

جمع ارقام m و n با هم برابرند. پس اگر n بر ۳ بخش پذیر باشد m هم بر ۳ بخش پذیر است:

$$m = 3 \times 191 = 573 \quad \text{و} \quad n = 3 \times 125 = 375$$

(امیررضا عرب)

پس رقم وسط برابر ۷ است.

۲۹۰. گزینه ۴؛ برای چهار حرف نه لزوماً متمایز M, N, P, Q ، جدول پالیندرومی به این شکل است.

M N M
P Q P
M N M

هر یک از این چهار حرف می‌تواند X یا Y باشد؛ پس جمعاً $4^4 = 16 \times 3 \times 3$ جدول پالیندرومی داریم.

(امیررضا عرب)

۲۹۱. گزینه ۴؛ مقدار b برابر ۱ یا ۲ است. (چرا)

مقدار y برابر ۵ یا ۵ است.

$$\begin{array}{r} \text{toy} \\ + \\ \text{toy} \\ + \\ \text{toy} \\ \hline \end{array}$$

baby

$$y = 0, b = 2 \rightarrow 0 = 4 \begin{cases} t = 8 \rightarrow a = 5 \rightarrow \text{حاصل} = 9 \\ t = 9 \rightarrow a = 8 \rightarrow \text{حاصل} = 12 \end{cases}$$

$$y = 5, b = 2 \rightarrow 0 = 7 \begin{cases} t = 6 \rightarrow a = 0 \rightarrow \text{حاصل} = 9 \\ t = 8 \rightarrow a = 6 \rightarrow \text{حاصل} = 15 \end{cases}$$

$$y = 5, b = 1 \rightarrow 0 = 0 \begin{cases} t = 6 \rightarrow a = 8 \rightarrow \text{حاصل} = 15 \\ t = 4 \rightarrow a = 2 \rightarrow \text{حاصل} = 9 \end{cases}$$

(عمیدرضا زبارتی باهر)

۲۹۲. گزینه ۳؛ از C به D وصل می‌کنیم.

$$\triangle ADC \cong \triangle BDC \quad (\text{ض ض ض}) \Rightarrow \angle C_1 = \angle C_2 \quad (1)$$

$$\triangle BPD \cong \triangle BCD \quad (\text{ض ز ض}) \Rightarrow \angle BPD = \angle C_2 \quad (2)$$

$$\Rightarrow \angle BPD = 30^\circ$$

(امیررضا عرب)

۲۹۳. گزینه ۳؛ بزرگ‌ترین مقدار این حاصل ضرب با چیدمان زیر حاصل می‌شود:

x	-۲۰	۴۰	۴۵
-۱۰			
-۱۵			
۵۰			

(فرضه تریبی)

۲۹۴. گزینه ۳؛

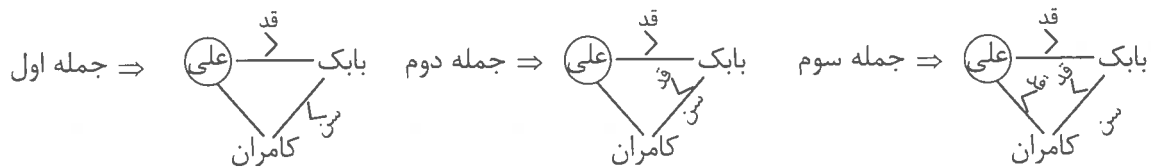
$$x = \frac{36^\circ}{2m}, y = \frac{36^\circ}{2n} \Rightarrow \frac{36^\circ}{2m} - \frac{36^\circ}{2n} = 27^\circ \Rightarrow \frac{18^\circ}{m} - \frac{18^\circ}{n} = 27^\circ$$

K	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۹	۱۰	۱۲	۱۵	۱۸	۲۰	۳۰	۳۶	۴۵	۶۰	۹۰	۱۸۰
$\frac{18^\circ}{K}$	۱۸۰	۹۰	۶۰	۴۵	۳۶	۳۰	۲۰	۱۸	۱۵	۱۲	۱۰	۹	۶	۵	۴	۳	۲	۱

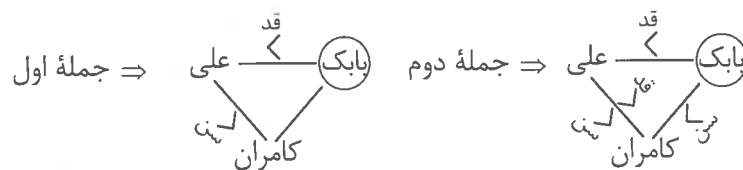
(امیررضا عرب)

پس کم‌ترین مقدار ممکن برای $m + n$ برابر $14 = 4 + 10$ است.

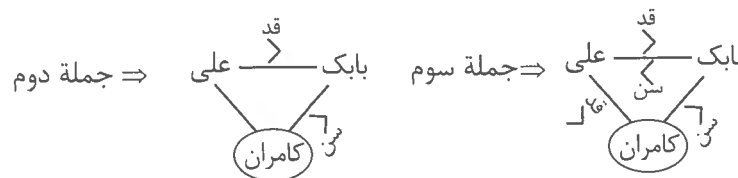
۲۹۵. گزینه ۲؛ اگر علی قبول نشده باشد، از جملات اطلاعات زیر را به دست می‌آوریم:



همان‌طور که دیده می‌شود، هر کدام از یکی دیگر قد بلندتر است که امکان ندارد. اگر بابک قبول نشده باشد، از جملات اطلاعات زیر را به دست می‌آوریم:



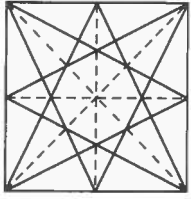
اطلاعات به دست آمده تا همین‌جا، با جمله سوم در تناقض است. پس این حالت نیز امکان ندارد. اگر کامران قبول نشده باشد، از جملات اطلاعات زیر را به دست می‌آوریم:



(امیررضا زیارتی باهر)

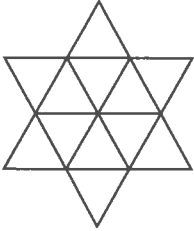
این اطلاعات با جمله دوم هم‌خوانی دارد و در نتیجه حالت درست همین است.

۲۹۶. گزینه ۴؛



(زهرة پندری)

۲۹۷. گزینه ۲؛ مساحت هر مثلث کوچک ۱۰ و مساحت هر یک از مثلث‌های مورد سؤال ۹۰ است.



(زهرة پندری)

۲۹۸. گزینه ۳؛ سه حالت در نظر می‌گیریم:

الف) یک توپ در خانه ۱ باشد. توپ سطر دوم می‌تواند در خانه ۴ یا ۶ باشد. اگر در خانه ۴ باشد ← ۱ حالت داریم ۹ و ۱۲

اگر در خانه ۶ باشد ← ۲ حالت داریم ۹ و ۱۰، ۷ و ۱۱

ب) یک توپ در خانه ۲ باشد. توپ سطر دوم می‌تواند در خانه ۴ یا ۵ یا ۶ باشد. اگر در خانه ۴ باشد ← ۱ حالت داریم ۸ و ۱۲

اگر در خانه ۵ باشد ← ۱ حالت داریم ۷ و ۱۲

اگر در خانه ۶ باشد ← ۱ حالت داریم ۸ و ۱۰

ج) یک توپ در خانه ۳ باشد. توپ سطر دوم می‌تواند در خانه ۴ یا ۵ باشد.

اگر در خانه ۴ باشد ← ۱ حالت داریم ۸ و ۱۱

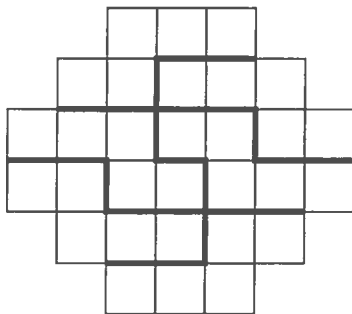
اگر در خانه ۵ باشد ← ۲ حالت داریم ۷ و ۱۱، ۹ و ۱۰

در کل $2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2 = 9$ حالت داریم.

۲۹۹. گزینه ۲؛

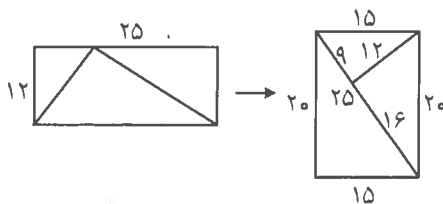
	۱	۲	۳
۴	۵		۶
۷	۸	۹	
۱۰		۱۱	۱۲

(معمد کل صفاتی)



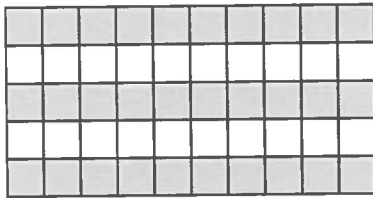
(فرفنده تریبی)

۳۰۰. گزینه ۱؛



(کوشا صمیمی)

۳۰۱. گزینه ۳؛

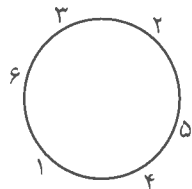


با توجه به این که در یک مربع 2×2 فقط ۲ تا قطر می توان رسم کرد و از شکل بالا می توان ۲ ردیف دوتایی پیدا کرد و ردیف وسط نیز مستقل از دو بخش بالا و پایین قطرهاش رسم می شود بنابراین از ۳۰ تا مربع بیش تر نمی توان پیدا کرد. (کوشا صمیمی)

۳۰۲. گزینه ۳؛ ۲ ساعت و ۴۵ دقیقه. عقربه ساعت شمار در ابتدای بازی بین ۳ و ۴ بوده پس در انتهای بازی عقربه دقیقه شمار بین ۳ و ۴ باید باشد، عقربه ساعت شمار در انتهای بازی بین ۶ و ۷ بوده پس عقربه دقیقه شمار در ابتدای بازی بین ۶ و ۷ بود.

بازی بین $3:30'$ تا $3:35'$ شروع و بین $6:15'$ تا $6:20'$ تمام شده است. (عمیرضا زیارتی باهر)

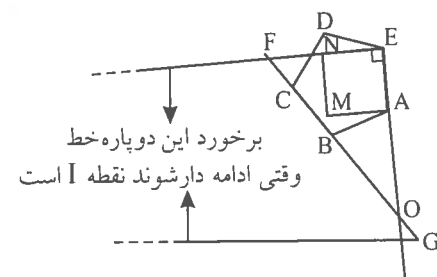
۳۰۳. گزینه ۵؛



$$4 + 6 = 10$$

(کوشا صمیمی)

۳۰۴. گزینه ۳؛ از آن جا که زاویه های پنج ضلعی منتظم برابر با 108° می باشد پس زاویه \hat{O} در مثلث ABO برابر با 36° و در نتیجه زاویه \hat{EFO} برابر با 54° خواهد بود.



برخورد این دو پاره خط
وقتی ادامه دار شوند نقطه I است

$$\text{در مثلث } FGI: \hat{EFG} = \hat{G} + \hat{I} \Rightarrow 54^\circ = 50^\circ + \hat{I} \Rightarrow \hat{I} = 4^\circ$$

(فرقنده ترابی)

۳۰۵. گزینه ۳؛ کفایت هنگام ورود، اسب را در خانه سفید قرار دهیم که ۱۲ خانه می شود و احتمال آن $\frac{12}{25}$ یا $\frac{48}{100}$ است.

(فرقنده ترابی)

۳۰۶. گزینه ۲؛ چون $3y$ بر ۳ بخش پذیر است و 312 بر ۳ بخش پذیر است پس x^2 هم باید بر ۳ بخش پذیر باشد. چون x عددی اول است. پس x حتماً ۳ باید باشد. حال $x = 3$ قرار می دهیم در نتیجه داریم:

$$3^2 + 3y = 312 \Rightarrow y = 101$$

(مهم گل صفغان)

و ۱۰۱ هم عددی اول است، پس یک جواب داریم.

۳۰۷. گزینه ۵؛ کوچک ترین عدد خیلی اول سه رقمی: ۲۲۳

بزرگ ترین عدد خیلی اول سه رقمی: ۷۷۳

$$A = 223 + 773 = 996 \Rightarrow 9 + 9 + 6 = 24$$

(مهم گل صفغان)

۳۰۸. گزینه ۳؛ مجموع عددهای هر سطر، ستون و قطر برابر است با:

۱۶	B ^D	۳	۲	۱۳
۵	۱۰ ^E	۱۱	۸	
۹	A	۶	۷ ^C	۱۲
۴	۱۵	۱۴	۱	

$$۴ + ۶ + ۱۱ + ۱۳ = ۳۴$$

$$۳۴ - ۱۴ - ۱۱ - ۲ = ۷$$

$$۳۴ - ۶ - ۷ - ۱۲ = ۹$$

$$۳۴ - ۵ - ۹ - ۴ = ۱۶$$

$$۳۴ - ۱۶ - ۱۳ - ۲ = ۳$$

پس مقدار C برابر است با:

پس مقدار A برابر است با:

و مقدار B برابر است با:

و مقدار D برابر است با:

و بقیه عددها به راحتی پیدا می‌شوند. پس $E + A = ۱۹$

۳۰۹. گزینه ۲؛ طبق صحبت محسن، هیچ‌یک از عددهای سه رقمی

$\overline{X۳۰}, \overline{X۳۱}, \overline{X۳۲}, \overline{X۳۳}, \overline{X۳۴}, \overline{X۳۵}, \overline{X۳۶}, \overline{X۳۷}, \overline{X۳۸}, \overline{X۳۹}$

بر ۱۱ بخش پذیر نیست و این یعنی هیچ‌یک از عددهای زیر بر ۱۱ بخش پذیر نیست. پس $X + ۷$ بایستی بر ۱۱ بخش پذیر باشد و این یعنی $X = ۴$.

$$X - ۳, X - ۲, X - ۱, X, X + ۱, X + ۲, X + ۳, X + ۴, X + ۵, X + ۶$$

(امیررضا عرب)

۳۱۰. گزینه ۳؛ طول ضلع‌های مثلث را از کوچک‌ترین عدد طبیعی شروع می‌کنیم و برای آن که مثلث تشکیل نشود ضلع سوم را برابر با

$$۱, ۲, ۳$$

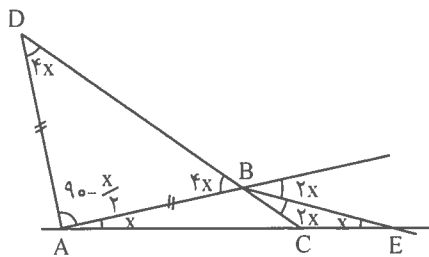
حاصل جمع دو ضلع قبلی در نظر می‌گیریم:

برای آن که مثلث بعدی نیز تشکیل نشود و کم‌ترین طول ممکن برای بلندترین میله را پیدا کنیم، ضلع بعدی را برابر با حاصل جمع دو عدد قبلی در نظر می‌گیریم:

$$۱, ۲, ۳, ۵, ۸, ۱۳, ۲۱, ۳۴, ۵۵, ۸۹$$

(فرقنده ترابی)

۳۱۱. گزینه ۱؛



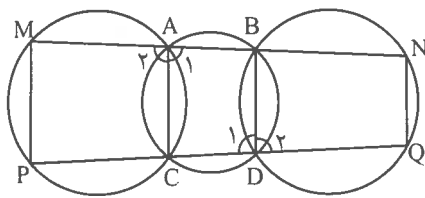
$$4x + 4x + 90 - \frac{x}{2} = 180 \Rightarrow \frac{15x}{2} = 90 \Rightarrow x = 12^\circ$$

(امیررضا عرب)

۳۱۲. گزینه ۳؛ دوباره ریختن تاس‌های ۱، ۲، ۳ انتخاب درستی است، چون به احتمال ۵۰٪ یکی از تاس‌های ۴، ۵ یا ۶ می‌آید که باعث افزایش امتیاز می‌شود، ولی به احتمال کم‌تری امتیاز کاسته می‌شود. با همین استدلال دوباره ریختن تاس‌های ۴، ۵ یا ۶ انتخاب نادرستی است. پس بهترین انتخاب، ریختن دوباره ۶ تاس (یعنی تاس‌های ۱، ۲ و ۳) است.

(امیررضا بیات)

۳۱۳. گزینه ۳؛



$$\left. \begin{aligned} \hat{A}_1 + \hat{A}_2 &= 180^\circ \\ \hat{P} + \hat{A}_2 &= 180^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{P} = \hat{A}_1 \quad (*)$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{A}_1 + \hat{D}_1 &= 180^\circ \\ \hat{D}_2 + \hat{D}_1 &= 180^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{D}_2 \quad (**)$$

$\xrightarrow{(**), (*)} \hat{P} = \hat{D}_2 \Rightarrow BD \parallel MP \Rightarrow MBDP$ دوزنقه است

(معمّر کل صفتان)

به همین ترتیب ANQC هم دوزنقه است. پس ۲ تا دوزنقه داریم.

۳۱۴. گزینه ۴؛ اگر تعداد تیم‌هایی که میانگین امتیاز ۷۲ گرفته‌اند را x و تعداد آن‌هایی که میانگین امتیاز ۵۰ گرفته‌اند را y بدانیم خواهیم داشت:

$$72x + 50y = 64(x + y) \Rightarrow 72x + 50y = 64x + 64y \Rightarrow 8x = 14y \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{14}{8} = \frac{7}{4}$$

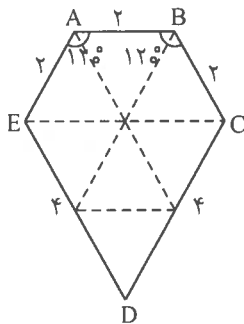
$$\Rightarrow \frac{7}{4+7} = \frac{x}{100} \Rightarrow x \approx 64\%$$

که برابر با نسبت تیم‌های صعود کرده به کل تیم‌ها است.

(قرقرنده ترایی)

۳۱۵. گزینه ۵؛ این پنج‌ضلعی در واقع از ۷ مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۲ به دست می‌آید. ارتفاع هر کدام از این مثلث‌ها طبق رابطه

فیثاغورس برابر $\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ است. پس مساحت هر کدام برابر $\frac{\sqrt{3} \times 2}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ است. پس مساحت پنج‌ضلعی برابر $7\sqrt{3}$ است.



(مرتضی فغانی ابری)

۳۱۶. گزینه ۵؛

$$\text{بیشترین امتیاز نفر اول} = 4 \times 10 + 7 = 47$$

$$\text{حالت اول} : 47 + 46 + 45 + 44 + 43 + 42 = 267$$

اما می‌دانیم مجموع امتیازها ۲۶۴ است: پس حالت بعدی را بررسی می‌کنیم:

$$\text{حالت دوم} : 47 + 46 + 44 + 43 + 42 + 41 = 263$$

$$\text{حالت درست} : 47 + 46 + 45 + 43 + 42 + 41 = 264$$

با توجه به دو حالت بالا پس سوم حتماً ۴۵ امتیاز آورده است.

(کوشا صمیمی)

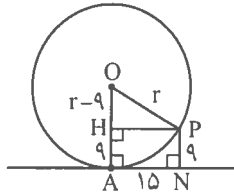
۳۱۷. گزینه ۵؛ تعداد پنج‌ضلعی‌ها: n

$$n \times 3 + 2 = 500 \Rightarrow n = 166$$

(زهرة پندی)

پس تعداد قطره‌هایی که باید رسم شود، ۱۶۵ تا است.

۳۱۸. گزینه ۱؛ رابطه فیثاغورس را در مثلث OPH می‌نویسیم:



(مرتضی قلمی ابری)

$$15^2 + (r-9)^2 = r^2 \Rightarrow 225 + r^2 + 81 - 18r = r^2$$

$$\Rightarrow 225 + 81 = 18r \Rightarrow 18r = 306 \Rightarrow r = 17$$

۳۱۹. گزینه ۳؛ مجموع زوایای مثلث‌ها برابر است با:

$$(50 - 2) \times 180^\circ + 53 \times 360^\circ = 154 \times 180^\circ$$

(امیررضا عرب)

پس ۱۵۴ مثلث ایجاد شده است.

۳۲۰. گزینه ۴؛ توجه داریم که اختلاف ۱ و ۴، اختلاف ۲ و ۵ و اختلاف ۳ و ۶ برابر ۳ است. برای پر کردن a ، ۶ انتخاب داریم و در

نتیجه برای b ، ۱ انتخاب به همین ترتیب برای پر کردن یکی از چهار مربع باقی‌مانده، ۴ انتخاب برای c ، برای d ، ۲ انتخاب و برای e

، ۲ انتخاب و در نهایت برای f ۱ انتخاب داریم. پس در کل به تعداد:

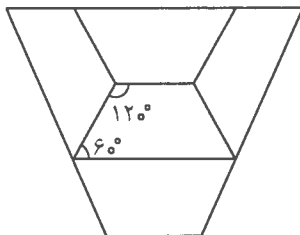
$$6 \times 1 \times 4 \times 2 \times 2 \times 1 = 96$$

روش خواهیم داشت.

c	d	b
a		e
		f

(امیررضا عرب)

۳۲۱. گزینه ۱؛ به کمک دوزنقه متساوی‌الساقین با زاویه‌های 60° و 120° می‌توان به پاسخ رسید.



(فرقنده ترابی)

۳۲۲. گزینه ۳؛ $(a, b, c) = d$ را در نظر بگیرید. اگر $d \neq 1$ باشد، آن‌گاه هر سه عدد a ، b و c بر d بخش‌پذیر هستند و در نتیجه

$a + b + c$ بر d بخش‌پذیر است. چون ۵۹ عددی اول است، نتیجه می‌گیریم $d = 1$ است. بدون کم شدن از کلیت مسئله فرض

$$(a, b) < (a, c) < (b, c)$$

می‌کنیم:

- با فرض $(a, b) = 2$ ، $(a, c) = 3$ و $(b, c) = 5$ داریم:

a بر ۶ بخش‌پذیر، b بر ۱۰ بخش‌پذیر و c بر ۱۵ بخش‌پذیر است. در این حالت با آزمون و خطا جواب می‌شود:

$$a = 24, b = 20, c = 15 \Rightarrow abc = 7200$$

با فرض $(a, b) = 2$ ، $(a, c) = 3$ و $(b, c) = 7$ داریم:

a بر ۶ بخش پذیر، b بر ۱۴ و c بر ۲۱ بخش پذیر است، در این حالت با آزمون و خطا جواب می شود:

$$a = 24, b = 14, c = 21 \Rightarrow abc = 7056$$

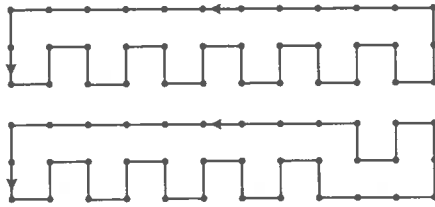
با فرض $(a, b) = 2$ ، $(a, c) = 5$ و $(b, c) = 7$ داریم:

a بر ۱۰ بخش پذیر، b بر ۱۴ و c بر ۳۵ بخش پذیر است، در این حالت با آزمون و خطا جواب می شود:

$$a = 10, b = 14, c = 35 \Rightarrow abc = 4900$$

(کیان کریمی فراسانی)

۳۲۳. گزینه ۳؛ هر مسیر شامل ۵ «دندانه» است، مثلاً:



هر دندانه یا به شکل  یا به شکل  است پس تعداد حالتها می شود 2^5 . از طرفی به ازای هر مسیر ساعتگرد، یک

مسیر پادساعتگرد نیز وجود دارد، پس جواب مسئله دو برابر 2^5 یعنی 2^6 می شود.

۳۲۴. گزینه ۴؛ اگر n اصیل و p بزرگترین عامل اول آن باشد و $n = px$ قرار دهیم، آن گاه بایستی داشته باشیم: $p > x$ به این

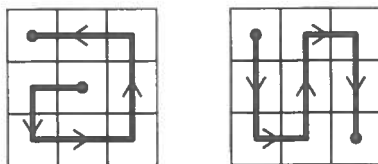
ترتیب برای هر عدد اول p ، به تعداد $p - 1$ عدد اصیل خواهیم داشت. بنابراین تعداد اصیل برابر است با:

$$119 = 129 - 10 = 119 \quad \text{جمع اعداد اول کوچکتر از } 30$$

$$2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 + 23 + 29 = 129$$

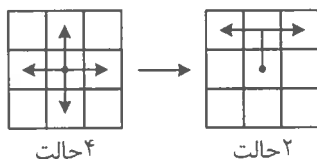
(امیررضا عرب)

۳۲۵. گزینه ۳؛ این مسئله به منزله آن است که از یک خانه شروع کنیم و با یک مسیر «مارپیچی» تمام خانهها را طی کنیم. مثلاً:

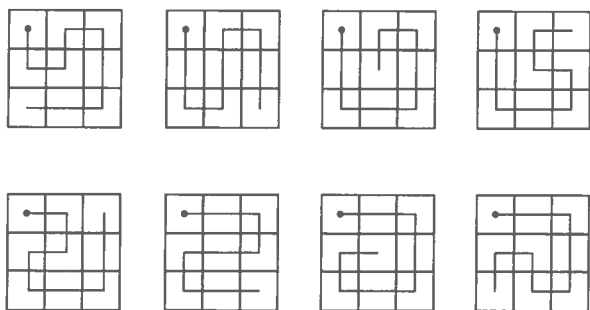


با کمی آزمون و خطا مشخص می شود که خانه ابتدایی یا باید خانه مرکزی باشد یا خانه‌ای گوشه‌ای.

برای خانه مرکزی ۸ جواب داریم:



برای هر خانه گوشه‌های ۸ جواب داریم:



(کیان کریمی، شماره‌اسانی)

پس برای خانه گوشه‌های $8 \times 4 = 32$ جواب داریم و در کل $40 = 8 + 32$ جواب داریم.

گزینه ۲) ۳۲۶

$$1^3 = 1 \quad 2^3 = 8 \quad 3^3 = 27 \quad 4^3 = 64 \quad 5^3 = 125 \quad 6^3 = 216$$

اعداد $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ را در نظر می‌گیریم. تمام زیرمجموعه‌های این مجموعه قابل قبول اند غیر از \emptyset و موارد زیر:

۱) تا $2^4 = 16 \Rightarrow 5$ و 6 باشند، بقیه باشند یا نباشند.

۲) $\{6, 4, 3\} \rightarrow 1$

پس $1 + 1 + 16 = 18$ تا از تعداد کل زیرمجموعه‌ها کم می‌شود.

$$2^6 - 18 = 64 - 18 = 46$$

(معمد کل مفتان)

دقت کنید که جمع چند مکعب کامل نمی‌تواند عدد دیگری شود.

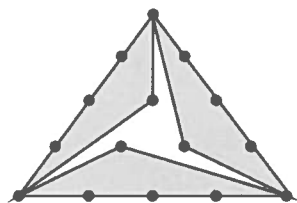
گزینه ۲)؛ برای نوشتن تمامی اعداد سه‌رقمی از هر رقم غیر صفر به سه نمونه و از رقم صفر به دو نمونه نیاز داریم، بنابراین 3×10

رقم نیازمندیم که $3 \times 10 = 6 \times 5$ پس با ۵ مکعب با ارقام $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0)$ $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0)$ $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0)$ $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0)$ $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0)$

(غرفنده تری)

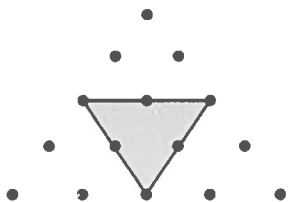
۳ بار خواهیم داشت که می‌توان هر عدد سه‌رقمی را به کمک آن‌ها ساخت.

گزینه ۵)؛ هر مثلثی با مساحت $\sqrt{3}$ در شکل مقابل مشخص شود، با دوران 120° و 240° درجه هم در شکل دیده خواهد شد.



بنابراین انگار از هر نوع مثلث ۳ تا وجود دارد. اما یک مثلث به مساحت $\sqrt{3}$ در شکل هست که دوران یافته آن با زاویه‌های 120° و 240°

درجه روی خودش می‌افتد. بنابراین از این مثلث تنها یکی موجود است، پس تعداد مثلث‌ها را می‌توان به صورت $3k + 1$ نمایش داد.



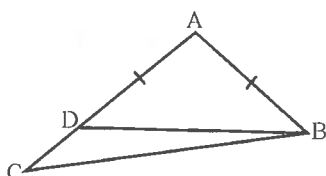
(زهرة پندری)

۳۲۹. گزینه ۲؛ کفایت که سه بار یا بیشتر سکه رو بیاید، بنابراین احتمال هر حالت را محاسبه می‌نماییم.

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow \frac{20}{26} \text{ سه پشت و سه رو} \\ \Rightarrow \frac{15}{26} \text{ دو پشت و چهار رو} \\ \Rightarrow \frac{6}{26} \text{ یک پشت و پنج رو} \\ \Rightarrow \frac{1}{26} \text{ شش رو} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{20+15+6+1}{26} = \frac{42}{26}$$

(فرغنده تریایی)

۳۳۰. گزینه ۲؛



$$\begin{aligned} \angle CBD &= \angle ABC - \angle ABD \\ &= \angle ABC - \angle ADB \end{aligned}$$

$$\angle ADB = \angle CBD + \angle ACB$$

$$\Rightarrow \angle CBD = \angle ABC - [\angle CBD + \angle ACB]$$

$$\Rightarrow 2\angle CBD = \angle ABC - \angle ACB = 30^\circ \Rightarrow \angle CBD = 15^\circ$$

(امیررضا عرب)

۳۳۱. گزینه ۱؛ کوچکتر از ۱۰۰۰

$$1 + 2 + 3 + 6 + 12 + 24 + 48 + 96 + 192 + 384 = 768$$

(همیرضا زیارتی باهر)

۳۳۲. گزینه ۱؛ برای این که تعداد ارقام را تا حد امکان زیاد کنیم از یک رقم ۰ شروع می‌کنیم. دو طرف این رقم ۰ باید رقم «۰» و «۱»

باشد و کنار صفر جدید هم باید یک رقم «۱» دیگر قرار دهیم. ۱۰۰۱

همانطور که مشخص است ارقام عدد از دو طرف زیاد می‌شود پس تا حد امکان از رقم‌های کوچکتری استفاده می‌کنیم تا تعداد ارقام

حداکثر باشد ۳۱۰۰۱۳

کوچکترین رقمی که در دو طرف عدد می‌توان اضافه کرد رقم «۳» است و کوچکترین رقمی که در دو طرف عدد شش رقمی جدید می‌توان

اضافه کرد رقم ۶ است. ۶۳۱۰۰۱۳۶

چون رقم دیگری نمی‌توان اضافه کرد، نتیجه می‌گیریم عدد ما ۸ رقمی است و برای این که مقدار آن را حداکثر کنیم به هر یک از ارقام آن

۳ واحد اضافه می‌کنیم. ۹۶۴۳۳۴۶۹، مجموع رقم‌های این عدد ۴۴ است.

۳۳۳. گزینه ۱؛ اگر عدد $b!$ بر $a!$ بخش پذیر باشد، همواره $a \leq b$ است. پس از آن جا که $(140!)!$ بر $((n!)!)!$

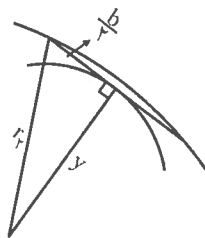
بخش پذیر باشد، داریم:

$$(n!)! \leq 140! \Leftrightarrow n! \leq 140 \Leftrightarrow n \leq 6:$$

(امیررضا عرب)

۳۳۴. گزینه ۳؛ در هر یک از اشکال زیر یکی از اضلاع دوازده و پانزده ضلعی منتظم مابین دو دایره محاطی و محیطی رسم شده است و از

تساوی مساحت حلقه‌های محصور خواهیم داشت:



$$S \text{ حلقه} = r_1^2 \pi - x^2 \pi = r_2^2 \pi - y^2 \pi$$

طبق فیثاغورس

$$\rightarrow \left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi = \left(\frac{b}{2}\right)^2 \pi \Rightarrow a = b$$

(فرفنده تریابی)

۳۳۵. گزینه ۴؛ ۱۳، ۱۱ که حذف می‌شوند ۱۴، ۷ در یک دسته، ۱۰، ۵ در یک دسته، ۲، ۳، ۴، ۶، ۸، ۹، ۱۲ در یک دسته، چون دسته سوم

۷ تاست پس حتماً دسته ۱۴، ۷ یا ۵، ۱۰ باید انتخاب شود.

حالت‌های مختلف را بررسی می‌کنیم؛

حالت اول:

۷	۲a	۵
۲b		a
۱۰	b	۱۴

در این صورت $a = 2b$ میشود که تناقض است. پس این حالت جواب نمی‌دهد.

حالت دوم:

۷	۲a	c
۲b		a
d	b	۱۴

$$ac = bd \Rightarrow$$

۷	۴	۱۲
۶		۲
۸	۳	۱۴

۷	۴	۹
۱۲		۲
۳	۶	۱۴

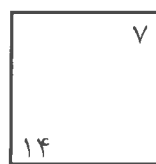
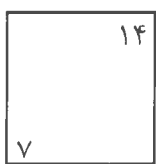
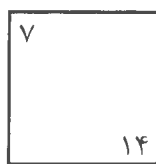
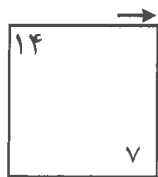
۷	۱۲	۳
۴		۶
۹	۲	۱۴

۷	۸	۹
۶		۴
۱۲	۳	۱۴

۷	۶	۱۲
۸		۳
۹	۴	۱۴

۷	۶	۸
۴		۳
۱۲	۲	۱۴

۶ حالت داریم که هر کدام ۴ حالت به صورت زیر دارد:



حالت ۲۴ \Rightarrow

(معمد گل صفتان)

برای حالت سوم هم که ۵، ۱۰ باشد، ۲۴ حالت داریم، پس در کل ۴۸ حالت داریم.

۳۳۶. گزینه ۴؛ از آن جا که چهار مهره‌ای که در گوشه‌ها قرار دارند، تنها دو مهره را تهدید می‌کنند، پس نمی‌توان آن‌ها را بیرون گذاشت. علاوه بر این آخرین مهره‌ای که غیر از این چهار مهره در صفحه خواهد ماند، یا دو مهره را تهدید می‌کند (گوشه‌ها) یا هیچ مهره‌ای را. بنابراین $59 = 64 - 4 - 1$ مهره می‌توانند به ترتیب زیر خارج شوند:

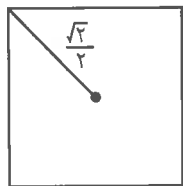
⊖	۱	۲	۳	۴	۵	۶	⊖
۱۳	۵۰	۵۱	۵۲	۵۳	۵۴	۵۵	۷
۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۵۶	۸
۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۵۷	۹
۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰	۳۱	۵۸	۱۰
۳۲	۳۳	۳۴	۳۵	۳۶	۳۷	۵۹	۱۱
۳۸	۳۹	۴۰	۴۱	۴۲	۴۳	⊖	۱۲
⊖	۴۴	۴۵	۴۶	۴۷	۴۸	۴۹	⊖

(فرفنده تراپی)

۳۳۷. گزینه ۳؛ G و D باید هم‌اتاقی باشند، ولی A و B نباید هم‌اتاقی باشند. بنابراین اگر D یا G با B در اتاق ۱ باشند، بقیه افراد به‌طور قطع مشخص می‌شوند.

(عمیدرضا زیارتی باهر)

۳۳۸. گزینه ۲؛ این ۱۴ رأس را حداقل با ۱۳ پاره‌خط می‌توان به هم وصل کرد. هر یک از این پاره‌خطها ممکن است طولی برابر ۱ یا

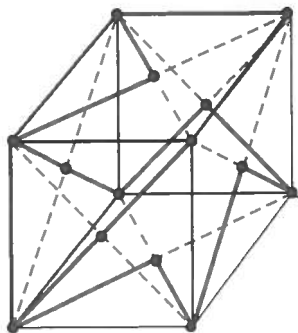


$\frac{\sqrt{2}}{2}$ داشته باشند. برای کوتاه‌تر شدن مسیر بهتر است طول بیشتر پاره‌خطها $\frac{\sqrt{2}}{2}$ باشد.

۶ تا رأس در وسط وجه‌ها هستند، پس حداکثر ۱۲ تا از پاره‌خطها می‌توانند طولی برابر $\frac{\sqrt{2}}{2}$ داشته باشند.

$$12 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = 6\sqrt{2} + 1$$

چنین مسیری در شکل زیر رسم شده است.



(زهرا پندی)

۳۳۹. گزینه ۲؛

$$10^{\wedge} < N < 10^{\circ} \Rightarrow 10^{\wedge} < M^{\circ} < 10^{\circ} \Rightarrow 20 < M < 40$$

چون مجموع رقم‌های N برابر ۴۵ است، پس N بر ۹ بخش پذیر است. در نتیجه M باید مضرب ۳ باشد و رقم یکان N باید ۴ یا ۹ باشد. اگر رقم یکان N برابر ۴ باشد، رقم یکان M برابر ۸ یا ۲ است، یعنی M باید برابر ۲۲ یا ۲۸ یا ۳۲ یا ۳۸ باشد، ولی هیچ یک مضرب ۳ نیست.

پس رقم یکان N برابر ۹ است. در نتیجه M باید برابر ۲۷ یا ۳۳ باشد، ولی ۳۳ دارای ۱۰ رقم است، پس M = ۲۷ است و باقی مانده ۲۷ بر ۵ برابر است با ۲.

(عمیرضا زیارتی، باهر)

۳۴۰. گزینه ۵؛

$$\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta BCD}} = \frac{AB}{BC}, \quad S_{\Delta ABD} = \frac{2}{5} S \text{ مربع} \quad CF = \frac{3}{5} AD$$

$$S_{\Delta BCD} = S_{BCFD} - S_{\Delta CFD} = \frac{2}{5} S \text{ مربع} - \frac{3}{10} S \text{ مربع} = \frac{1}{10} S \text{ مربع}$$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{\frac{2}{5} S \text{ مربع}}{\frac{1}{10} S \text{ مربع}} = 4 \Rightarrow AB = 4BC \Rightarrow AC = 5BC$$

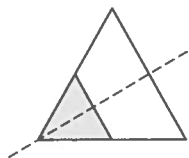
$$\frac{S_{\Delta BCF}}{S_{\Delta ACF}} = \frac{BC}{5BC} = \frac{1}{5} \Rightarrow S_{\Delta BCF} = \frac{1}{5} (S_{\Delta ACF}) = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2} S \text{ مربع} - \frac{1}{5} S \text{ مربع} \right) = \frac{3}{50} S \text{ مربع}$$

$$S_{\Delta BEF} = \frac{1}{5} S \text{ مربع} - \frac{3}{50} S \text{ مربع} = \frac{7}{50} S \text{ مربع}$$

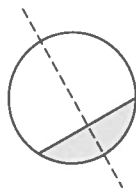
$$\frac{DE}{EF} = \frac{S_{\Delta BDE}}{S_{\Delta BEF}} = \frac{\frac{1}{5} S \text{ مربع}}{\frac{7}{50} S \text{ مربع}} = \frac{10}{7}$$

(امیررضا عرب)

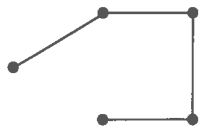
۳۴۱. گزینه ۲؛



(عمیرضا بیات)



۳۴۲. گزینه ۱؛ با ساختن ۴ جاده مانند روبه‌رو می‌توان از هر شهری به شهر دیگر رفت.



(مرتضی فغانی ابری)

البته این حالت تنها جواب ممکن نیست.

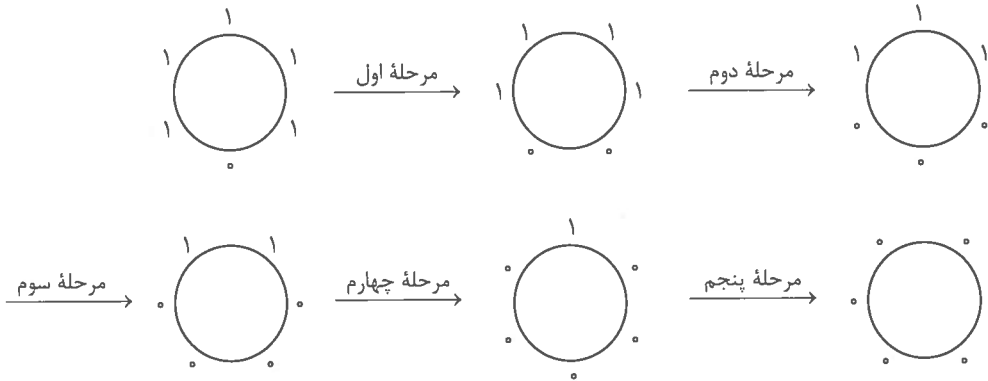
۳۴۳. گزینه ۲؛ ابتدا عدد خانه بین ۴۹ و ۱۸ را به دست می‌آوریم. سپس به همین ترتیب اعداد خانه‌ها را از راست به چپ به دست می‌آوریم:

$$47 - 18 = 29$$

۲	۱	۳	۴	۷	۱۱	۱۸	۲۹	۴۷
---	---	---	---	---	----	----	----	----

(کیان کریمی فراسانی)

۳۴۴. گزینه ۵؛

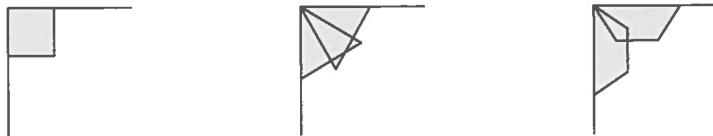


(مرتضی فغانی ابری)

۳۴۵. گزینه ۱؛ بعد از ورودی A، همه لامپ‌ها خاموش می‌شود. بعد از ورودی A ورودی D داده می‌شود که تأثیری در لامپ‌ها ندارد و هم‌چنان همه لامپ‌ها خاموش می‌ماند.

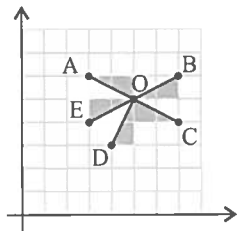
(مرتضی فغانی ابری)

۳۴۶. گزینه ۲؛ قسمت مهم در این سؤال تمیز کردن کنج اتاق است. چون قسمت‌های میانی با تمام تی‌ها تمیز می‌شوند. تنها با تی شش‌ضلعی منتظم نمی‌توان کنج اتاق را تمیز کرد.



(همیدرضا بیات)

۳۴۷. گزینه ۵؛ به مثلث‌های هم‌نهشت در شکل زیر توجه کنید:

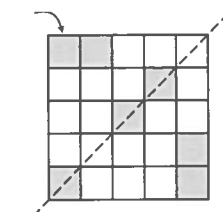


وترهای آن‌ها با هم برابر است. پس:

$$OA = OB = OC = OD = OE$$

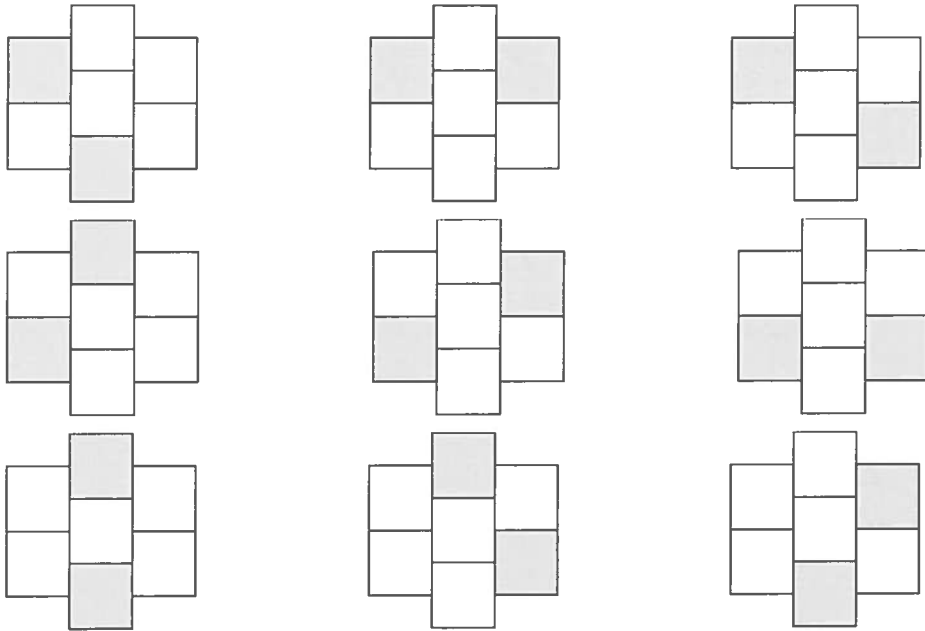
(کیان کریمی فراسانی)

۳۴۸. گزینه ۱؛ کافی است گوشه بالا و چپ را رنگ کنیم.



(امین رفیعی نیا)

۳۴۹. گزینه ۵؛



(عمیدرضا بنات)

۳۵۰. گزینه ۴؛ با توجه به این که حاصل ضرب A در $(B \times C - 1)$ عددی زوج شده است، حتماً $A = 2$ است.

$$A = 2 \Rightarrow B \times C - 1 = 64 \Rightarrow B \times C = 65 \Rightarrow B \times C = 5 \times 13$$

(امین رفیعی نیا)

بنابراین $A + B + C = 2 + 5 + 13 = 20$.

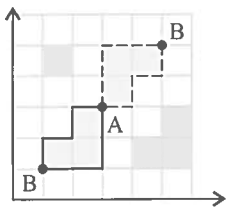
۳۵۱. گزینه ۱؛

$$\begin{cases} A = 0, B = 0 : 0 \oplus (0 \oplus (0 \oplus 0)) = 0 \oplus (0 \oplus 0) = 0 \oplus 0 = 0 \\ A = 0, B = 1 : 1 \oplus (0 \oplus (1 \oplus 0)) = 1 \oplus (0 \oplus 1) = 1 \oplus 1 = 0 \\ A = 1, B = 0 : 0 \oplus (1 \oplus (0 \oplus 1)) = 0 \oplus (1 \oplus 1) = 0 \oplus 0 = 0 \\ A = 1, B = 1 : 1 \oplus (1 \oplus (1 \oplus 1)) = 1 \oplus (1 \oplus 0) = 1 \oplus 1 = 0 \end{cases}$$

(اشکان میرزایی)

۳۵۲. گزینه ۳؛ بعد از هر ۴ مرحله چرخش، شکل به جای اول خود بازمی‌گردد. پس ۱۰ مرحله چرخاندن

شکل فرقی با ۲ مرحله چرخاندن آن ندارد. در نتیجه مختصات جدید B برابر با $\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$ می‌شود.



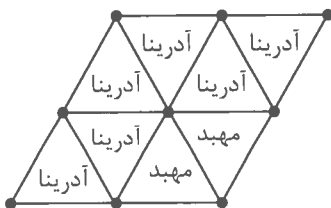
(امین رفیعی نیا)

۳۵۳. گزینه ۳؛ هر وجه کنار چهار وجه دیگر است. بنابراین علاوه بر ۲، ۴ و ۶ یک عدد دیگر (که ۳ یا ۵ است) مجاور ۱ و عدد دیگر

(عمیدرضا زیارتی باهر)

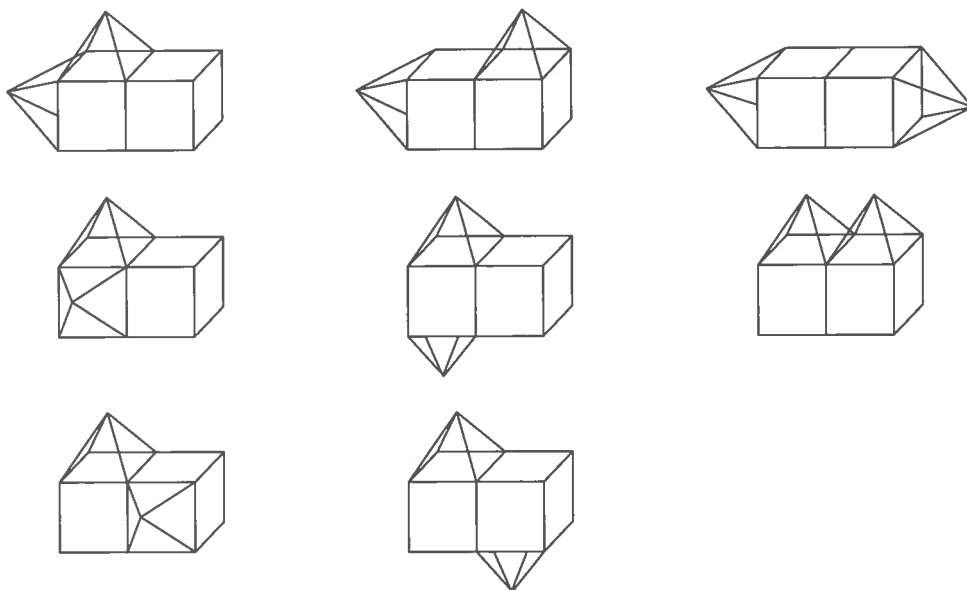
(از بین ۳ و ۵) مقابل ۱ است. بنابراین همواره ۳ و ۵ روی وجه‌های کنار یک‌دیگرند.

۳۵۴. گزینه ۳؛ اگر هر کس بهترین بازی ممکن را انجام دهد، وضعیت نهایی شکل به این صورت درمی‌آید:



(مرتضی قحطی ابدی)

۳۵۵. گزینه ۴):



(معیرفضا بیات)

۳۵۶. گزینه ۳): هر کدام از خانه‌های ۱، ۲، ۳ و ۴ این خاصیت را دارند:

۱	۶	۲
۹	۵	۷
۴	۸	۳

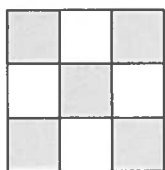
برای مثال با حذف خانه شماره ۱ بقیه جدول را به صورت زیر می‌پوشانیم:

X	—	
—		
—		

خانه شماره ۵ نیز این خاصیت را دارد:

—		
	X	—
	—	

خانه‌های شماره‌های ۶، ۷، ۸ و ۹ این خاصیت را ندارند. زیرا اگر این جدول را با رنگ‌های سیاه و سفید به صورت شطرنجی رنگ کنیم، با حذف هر کدام از خانه‌های ۶، ۷، ۸، ۹ اختلاف تعداد خانه‌های سیاه و سفید برابر ۲ عدد می‌شود. پس امکان ندارد با کاشی‌های 1×2 پوشانده شوند، چون هر کاشی 1×2 یک خانه سیاه و یک خانه سفید را می‌پوشاند.



(مرتضی قشما بیبری)

۳۵۷. گزینه ۴؛ برای به دست آوردن کوتاه‌ترین مسیر، باید از بیش‌ترین تعداد ممکن جاده‌های آریب استفاده کرد و فقط به سمت بالا و راست حرکت کرد. پس کوتاه‌ترین مسیر، مسیری است که در آن از ۲ جاده به سمت بالا، ۱ جاده آریب و ۱ جاده به سمت راست استفاده کرد.

$$(2 \times 3) + (1 \times 5) + (1 \times 4) = 6 + 5 + 4 = 15$$

(امیر رضا شیرمست)

۳۵۸. گزینه ۱؛ ساده‌ترین راه حل برای این مسئله این است که اعداد طبیعی را پشت سر هم بنویسیم و دائماً تعداد اعداد مربع کامل و سایر اعداد را بشماریم و این کار را آن قدر ادامه دهیم تا جایی که نسبت تعداد اعداد مربع کامل به سایر اعداد ۱ به ۴ شود. اولین عددی

که دقیقاً $\frac{1}{5}$ اعداد قبل از آن مربع کامل هستند ۱۶ است (از بین ۱۵ عدد قبل از آن اعداد ۱، ۴ و ۹ مربع کامل هستند که تعدادشان

۳ تا است و $\frac{1}{5}$ کل اعداد یعنی ۱۵ است.)

(همیرضا بیات)

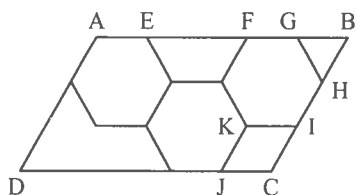
۳۵۹. گزینه ۲؛ حامد زمان بیش‌تری را مشغول راه رفتن بوده است. در حالی که هانی نصف زمان را می‌دویده و نصف آن را راه می‌رفته است. پس هانی زودتر به خط پایان رسیده است.

(همیرضا زیارتی باهر)

۳۶۰. گزینه ۲؛ فرض می‌کنیم طول ضلع شش‌ضلعی‌ها x باشد. می‌دانیم طول قطر بزرگ در هر شش‌ضلعی دو برابر ضلع آن است، پس

$$EF = 2x. \text{ از طرفی مثلث } GBH \text{ متساوی‌الاضلاع است، پس } BG = BH = x$$

می‌دانیم چهارضلعی $JKIC$ لوزی است، پس $IC = x$.



$$AB = AE + EF + FG + GB = x + 2x + x + x = 5x$$

$$AD = BC = BH + IH + IC = x + x + x = 3x \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{5x}{3x} = \frac{5}{3}$$

(کیان کریمی فراسانی)

۳۶۱. گزینه ۴؛ اگر آخرین عددی که خط خورده $11^2 = 121$ باشد، پس در حال خط زدن مضارب ۱۱ هستیم. پس عدد بعدی

(کیان کریمی فراسانی)

$11 \times 13 = 143$ است. پس n حداقل ۱۴۳ است.

۳۶۲. گزینه ۴؛ کوچک‌ترین عددی مانند B که $\overline{AB} = \overline{BA}$ خود A است، پس ۸ رقم دارد.

$$B = A = 11121221$$

(مرتضی قشماقی ابری)

۳۶۳. گزینه ۵؛ اگر این خرگوش سه پرش پادساعتگرد به طول ۵ و دو پرش ساعتگرد به طول ۸ انجام دهد، در مجموع این پنج پرش ۱

خانه ساعتگرد به جلو رفته است. پس او می‌تواند با تکرار این پنج پرش هر بار ۱ خانه ساعتگرد به جلو برود و به این ترتیب به همه خانه‌ها

(امیرمعمد نظری)

دسترسی پیدا کند.

۳۶۴. گزینه ۴؛ این اعداد عبارت‌اند از:

$$10 + 20 + 30 + 50 + 70 + 110 + 130 + 170 + 190 + 230 = 1010$$

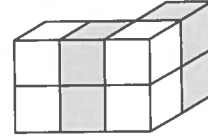
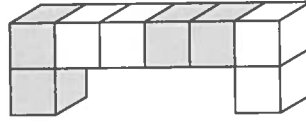
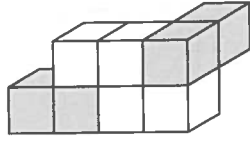
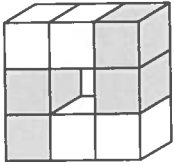
(همیرضا زیارتی باهر)

۳۶۵. گزینه ۳؛

$$27 \times 6 = 3 \times (6 \times 3 \times 3)$$

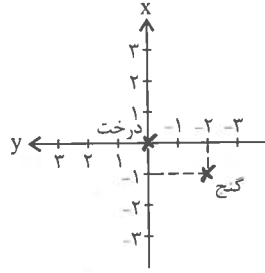
(همیرضا زیارتی باهر)

۳۶۶. گزینه‌های ۱، ۳، ۴ و ۵ را می‌توان به صورت زیر ساخت ولی برای گزینه ۲ راهی وجود ندارد.

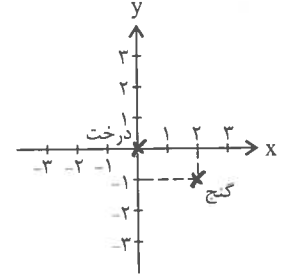


(کیان کریمی فراسانی)

۳۶۷. گزینه ۵؛



نقشه کیانا



نقشه نگار

(عمیرضا بیات)

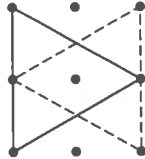
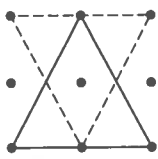
۳۶۸. گزینه ۱؛

$$m = 6n \Rightarrow m + n = 6n + n = 7n$$

مجموع m و n حتماً مضرب ۷ خواهد بود، پس نمی‌تواند برابر با ۳۲ باشد.

(امین رفیعی نیا)

۳۶۹. گزینه ۳؛



(عمیرضا بیات)

۳۷۰. گزینه ۱؛

$$\text{مجموع وزن عددهای بین } ۱۰ \text{ تا } ۱۹ \rightarrow \underbrace{(۰+۱+\dots+۹)}_{۴۵} + ۲ \times \underbrace{(۱+\dots+۱)}_{۱۰} = ۴۵ + ۲ \times ۱۰$$

$$\text{مجموع وزن عددهای بین } ۲۰ \text{ تا } ۲۹ \rightarrow \underbrace{(۰+۱+\dots+۹)}_{۴۵} + ۲ \times \underbrace{(۲+\dots+۲)}_{۱۰} = ۴۵ + ۲ \times ۲۰$$

$$\text{مجموع وزن عددهای بین } ۳۰ \text{ تا } ۳۹ \rightarrow \underbrace{(۰+۱+\dots+۹)}_{۴۵} + ۲ \times \underbrace{(۳+\dots+۳)}_{۱۰} = ۴۵ + ۲ \times ۳۰$$

⋮

$$\text{مجموع وزن عددهای بین } ۹۰ \text{ تا } ۹۹ \rightarrow \underbrace{(۰+۱+\dots+۹)}_{۴۵} + ۲ \times \underbrace{(۹+\dots+۹)}_{۱۰} = ۴۵ + ۲ \times ۹۰$$

$$\text{مجموع همه وزن‌ها} = ۹ \times ۴۵ + ۲ \times \underbrace{(۱+\dots+۹)}_{۴۵} \Rightarrow \text{مجموع همه وزن‌ها} = ۲۹ \times ۴۵ = ۱۳۰۵$$

(مرتضی فمامی)

۳۷۱. گزینه ۱؛

$$A + 2 < F \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \text{ یا } 2 \text{ یا } 3 \\ F = 4 \text{ یا } 5 \text{ یا } 6 \end{cases}$$

$$2 \times B = C + 6 \Rightarrow \begin{cases} B = 4 \text{ یا } 5 \\ C = 2 \text{ یا } 4 \end{cases}$$

$$C + 1 = A \Rightarrow A = 3 \text{ یا } 5$$

از طرفی ۳ یا ۲ یا ۱ یا A و از طرف دیگر ۵ یا ۳ یا A. پس نتیجه می‌گیریم $A = 3$.

$$A + 2 < F \Rightarrow 5 < F \Rightarrow F = 6$$

$$C + 1 = A \Rightarrow C + 1 = 3 \Rightarrow C = 2$$

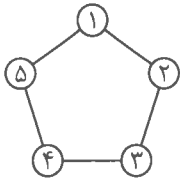
$$2 \times B = C + 6 \Rightarrow 2 \times B = 8 \Rightarrow B = 4$$

$$D < E \Rightarrow D = 1, E = 5$$

$$F + E = 6 + 5 = 11$$

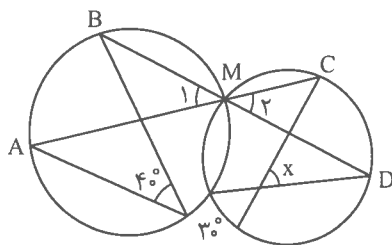
(عمیررضا زیارتی، باهر)

۳۷۲. گزینه ۵؛ در این ۵ دایره کناری، اگر دایره ۱ سیاه باشد، ۲ سفید، ۳ سیاه، ۴ سفید و ۵ سیاه می‌شوند که ۵ و ۱ هم‌رنگ هستند. پس این کار امکان‌پذیر نیست.



(اشکان میرزایی)

۳۷۳. گزینه ۴؛



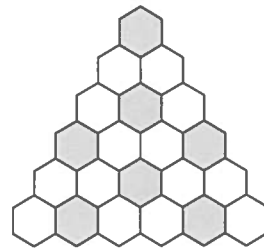
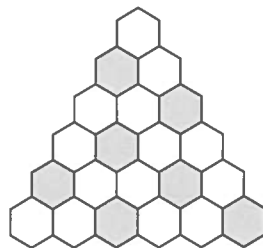
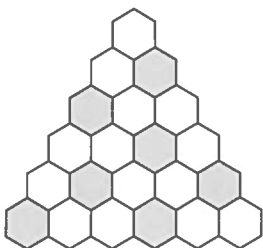
$$\left. \begin{aligned} \hat{M}_1 &= \frac{\widehat{AB}}{2} \\ \frac{\widehat{AB}}{2} &= 40^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \hat{M}_1 &= 40^\circ \\ \hat{M}_1 &= \hat{M}_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{M}_2 = 40^\circ$$

$$\hat{M}_2 = \frac{\widehat{CD}}{2} = 40^\circ \Rightarrow \widehat{CD} = 80^\circ$$

$$x = \frac{\widehat{CD} + 30^\circ}{2} = \frac{80^\circ + 30^\circ}{2} = 55^\circ$$

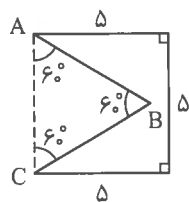
(مرتضی فحامی)

۳۷۴. گزینه ۳؛ از یک گوشه شروع کنید و ادامه دهید. تنها سه حالت زیر را می‌توان ایجاد نمود.



(امین رفیعی‌نیا)

۳۷۵. گزینه ۴؛ مثلث ABC متساوی الاضلاع است. پس:



$$AB = BC = AC = 5$$

بنابراین محیط شکل برابر با $5 \times 5 = 25$ است.

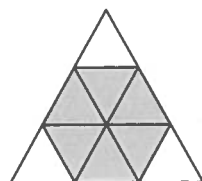
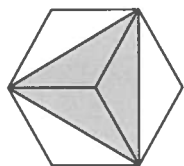
(امین رفیعی نیا)

۳۷۶. گزینه ۱؛ از رقم سمت چپ شروع می‌کنیم. رقم بعدی یا یک واحد زیاد یا یک واحد کم می‌شود و همین‌طور ادامه می‌دهیم. بعد از ۴

مرحله به یکان می‌رسیم، تعداد حالت‌ها برابر با $4^4 = 16$ است.

(کیان کریمی فراسانی)

۳۷۷. گزینه ۳؛ با توجه به شکل زیر مساحت هر مثلث داخل شش ضلعی $\frac{1}{4}$ مساحت شش ضلعی است:

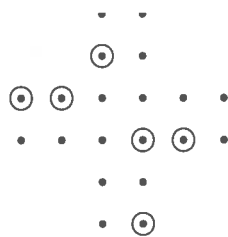


باتوجه به شکل زیر مساحت هر شش ضلعی داخل مثلث $\frac{2}{3}$ مساحت مثلث است:

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{9}$$

(عمیدرضا زیارتی باهر)

۳۷۸. گزینه ۳؛



(عمیدرضا زیارتی باهر)

۳۷۹. گزینه ۳؛ مساحت مثلث‌های ABM و ADN برابر هستند، طول ضلع مربع را a در نظر می‌گیریم.

$$S_{ABM} = S_{ADN} \Rightarrow BM = DN \Rightarrow CM = CN$$

$$S_{MNC} = \frac{CM \cdot CN}{2} = 12/5 \Rightarrow CM^2 = 25 \Rightarrow CM = CN = 5$$

$$AD = a \Rightarrow \left. \begin{array}{l} DN = a - 5 \\ S_{ADN} = 7 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a(a-5)}{2} = 7 \Rightarrow a^2 - 5a = 14 \Rightarrow a(a-5) = 14 \Rightarrow a = 7$$

$a = 7$ ، پس مساحت مربع برابر است با $7 \times 7 = 49$.

$$S_{AMN} = 49 - 7 - 7 - 12/5 = 22/5$$

(مرتضی قناملی)

۳۸۰. گزینه ۱؛ در وضعیت اولیه ۶ لامپ روشن و ۱۰ لامپ خاموش هستند. پس کافی است ۲ تا از لامپ‌های خاموش، روشن شوند که با

۱ کلید قابل انجام است.

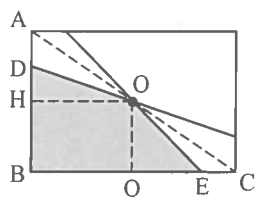
(عمیدرضا زیارتی باهر)

۳۸۱. گزینه ۵؛ پاسخ جدول فقط به شکل زیر است:

۱۷	۱۶	۱۵	۱۴	۱۳	۱۲	۱۱	۱۰
۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۹
۳۵	۳۶	۳۷	۳۸	۳۹	۴۰	۲۵	۸
۳۴	۳۱	۳۰	۲۹	۲۸	۲۷	۲۶	۷
۳۳	۳۲	۱	۲	۳	۴	۵	۶

(کیان کریمی فراسانی)

۳۸۲. گزینه ۲؛ باتوجه به تقارن، نقطه O مرکز مستطیل است.



$$\begin{aligned} \text{مساحت } \triangle EOC - \text{مساحت } \triangle AOD &= \text{مساحت } \triangle ABC - \text{مساحت تیره} \\ &= \frac{1}{2} \times AB \times BC - \frac{1}{2} \times AD \times OH - \frac{1}{2} \times EC \times OQ \\ &= \frac{1}{2} \times 4 \times 7 - \frac{1}{2} \times 1 \times 3/5 - \frac{1}{2} \times 1 \times 2 \\ &= 14 - 1/75 - 1 = 11/25 \end{aligned}$$

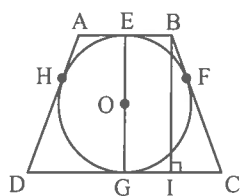
(امین رفیعی نیا)

۳۸۳. گزینه ۴؛ مجبوریم یک یا هر دو میوه را به دو بخش تقسیم کنیم. تمام حالت‌های ممکن در زیر نوشته شده است:

نفر سوم	نفر دوم	نفر اول	نفر سوم	نفر دوم	نفر اول
نیم پرتقال	نیم سیب	نیم سیب + نیم پرتقال	نیم سیب	نیم سیب	نیم سیب
نیم سیب	نیم پرتقال	نیم سیب + نیم پرتقال	نیم سیب	نیم پرتقال	نیم پرتقال
نیم پرتقال	نیم سیب	نیم سیب	نیم سیب + نیم پرتقال	نیم سیب + نیم پرتقال	نیم پرتقال
نیم سیب	نیم پرتقال	نیم سیب	نیم سیب + نیم پرتقال	نیم سیب	نیم سیب
نیم سیب + نیم پرتقال	نیم سیب	نیم سیب	نیم سیب	نیم سیب	نیم سیب + نیم پرتقال
نیم سیب + نیم پرتقال	نیم سیب	نیم سیب	نیم سیب	نیم پرتقال	نیم سیب + نیم پرتقال

(امین رفیعی نیا)

۳۸۴. گزینه ۲؛

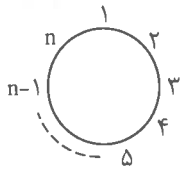


$$\left. \begin{aligned} AB &= 8 \\ DC &= 18 \\ BE &= BF \\ CF &= CG \\ AE &= AH \\ DH &= DG \end{aligned} \right\} \Rightarrow AB + CD = BC + AD = 26 \Rightarrow BC = 13$$

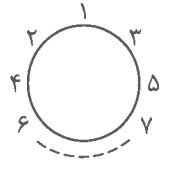
$$IC = GC - GI = \frac{18}{2} - \frac{8}{2} = 9 - 4 = 5$$

$$\begin{aligned} BC^2 &= BI^2 + IC^2 \Rightarrow 13^2 = BI^2 + 5^2 \Rightarrow BI = 12 \\ \Rightarrow GE &= 12 \Rightarrow OG = 6 \end{aligned}$$

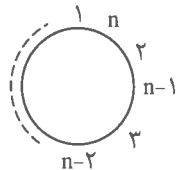
۳۸۵. گزینه ۲؛



→ اعداد قرمز: $\underbrace{1+1+1+1+\dots+1}_{n-1} + (n-1) = 2n-2$

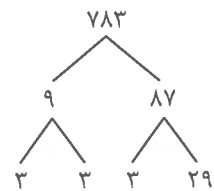


→ اعداد قرمز: $1+1+\underbrace{2+2+\dots+2}_{n-2} = 2n-2$



→ اعداد قرمز: $n-1+n-2+n-3+n-4+\dots > 2n-2$

(همیدرضا زیارتی باهر)



(همیدرضا زیارتی باهر)

$$20000 = 2 \times 2^4 \times 5^4$$

$$20000 - 17 \times 25 = 2^5 \times 5^4 - 17 \times 5^2 = (2^5 \times 5^2 - 17) \times 5^2$$

$$= 25 \times 783 = 25 \times 3 \times 3 \times 3 \times 29 = 25 \times 27 \times 29$$

۳۸۶. گزینه ۲؛

۳۸۷. گزینه ۳؛ درون مکعب بزرگ ۸ نقطه (رئوس مکعب درونی) وجود دارد. تنها این نقاط می‌توانند محل اتصال یک جفت لایق باشند.

از سوی دیگر هر یک از این نقاط دقیقاً ۴ جفت لایق تولید می‌کنند. پس تعداد جفت‌های لایق برابر است با $8 \times 4 = 32$. (امین رفیعی نیا)

۳۸۸. گزینه ۴؛

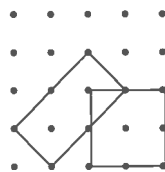
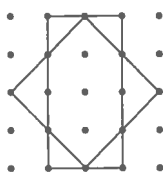
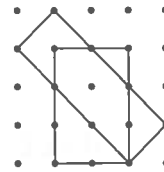
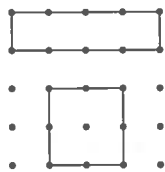
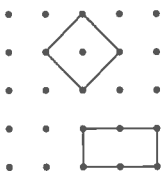
$$a \times b \times c = 900 \Rightarrow a \times b \times c = 2^2 \times 3^2 \times 5^2$$

سه عدد a ، b و c به شرطی می‌توانند دو به دو نسبت به هم اول باشند که 2^2 ، 3^2 و 5^2 باشند. پس:

$$a + b + c = 2^2 + 3^2 + 5^2 = 4 + 9 + 25 = 38$$

(کیان کریمی فراسانی)

۳۸۹. گزینه ۵؛



(همیدرضا زیارتی باهر)

$$\begin{array}{r}
 ۶۴۹۰۰۰ \overline{) ۷۹۲} \\
 ۶۳۳۶ \\
 \hline
 ۱۴۳۱۰ \\
 ۱۵۶۴ \\
 \hline
 ۷۹۲ \\
 ۷۴۸۰ \\
 \hline
 ۷۱۲۸ \\
 ۳۵۲
 \end{array}$$

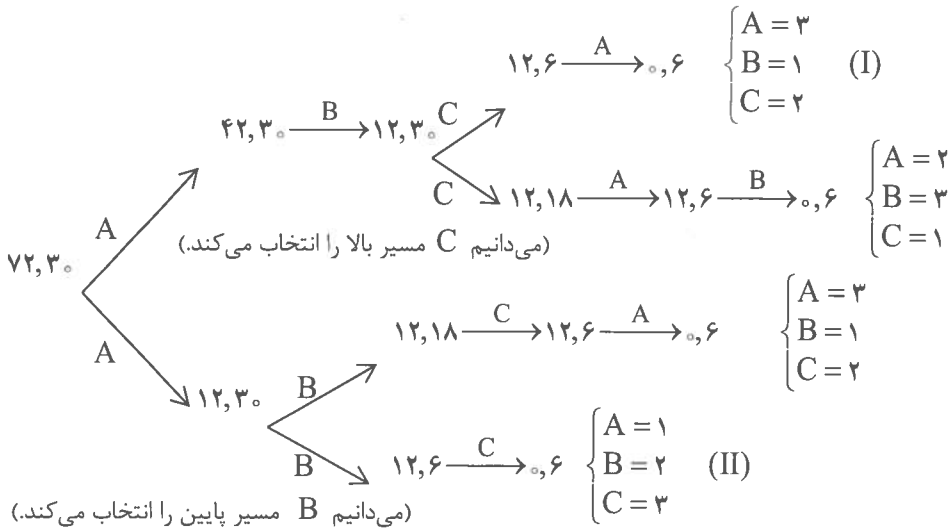
(عمیدرضا زیارتی باهر)

۳۹۰. گزینه ۲؛ چون باقی مانده $۶۴۹۰۰۰ \div ۷۹۲ = [۸, ۹, ۱۱]$ برابر با ۳۵۲ است، پس؛

$$۶۴۹۰۰۰ - ۳۵۲ = ۶۴۸۶۴۸$$

$$۶ + ۴ - ۸ = ۲$$

۳۹۱. گزینه ۱؛



(عمیدرضا زیارتی باهر)

بنابراین بسته به انتخاب A، وضعیت (I) یا (II) رخ می دهد که A، وضعیت (I) را ترجیح می دهد.

۳۹۲. گزینه ۴؛ عددهایی که در رابطه $\boxed{x} = \boxed{x}$ صدق می کند می بایست در اطراف ۱ و ۶۴ باشند $(۱^۶, ۲^۶)$. با کمی دقت این اعداد را می توان به دست آورد:

۱, ۲

۵۷, ۵۸, ۵۹, ..., ۷۲

(امین رفیعی نیا)

بنابراین ۱۸ عدد با این ویژگی وجود دارد.

(مرتضی فهامی)

۳۹۳. گزینه ۵؛ عدد توان یک پنج ضلعی سه حالت دارد: -۳، ۱ و ۵.

۳۹۴. گزینه ۲؛ عددهایی که بر ۴ بخش پذیر هستند، می توانند تعداد ضلع های یک چندضلعی باشند که عدد توان آن صفر شده است.

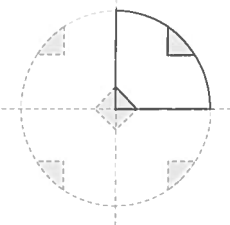
(مرتضی فهامی)

۳۹۵. گزینه ۲؛ اختلاف بین عددهای توان های یک n ضلعی بر ۴ بخش پذیر است. پس در بین این عددها، عددهای ۲، ۶ و -۲ و -۶

(مرتضی فهامی)

می توانند عددهای توان آن n ضلعی باشد.

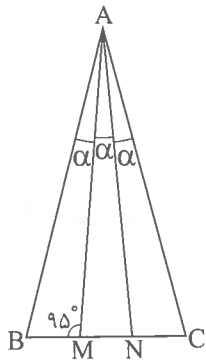
۳۹۶. گزینه ۲؛ کافی است تقارن شکل را نسبت به دو خط تا رسم کنیم.



۲۳، ۲۵، ۲۸، ۲۱۳، ۲۲۱، ۲۳۴، ۲۵۵، ۲۸۹، ۲۱۴۴

خانه ۱۳ ام

۳۹۷. گزینه ۵؛ عددهای تولیدشده عبارتند از:



$$\frac{18^\circ - 3\alpha}{2} + \alpha = 85^\circ \Rightarrow 18^\circ - \alpha = 17^\circ \Rightarrow \alpha = 1^\circ$$

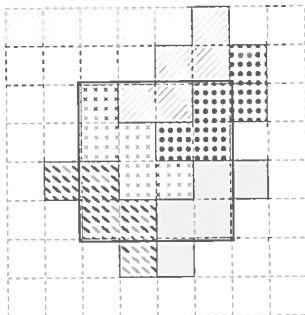
$$\hat{BAC} = 3^\circ$$

۳۹۸. گزینه ۲؛

۳۹۹. گزینه ۱؛

۳۰۱-۳۰۲-۳۰۳-۳۰۴-۳۰۵-۳۰۶-۳۰۷-۳۰۸-۳۰۹

۴۰۰. گزینه ۵؛ می توان ثابت کرد که با ۴ بار مهر زدن یا کم تر، نمی توان مربعی ۴×۴ را پر کرد.



۴۰۱. گزینه ۲؛ به احتمال برابر، عدد یکی از این سه نفر بزرگ ترین، یکی کوچک ترین و یکی وسطی خواهد بود. (بدون توجه به ترتیبی که

کارتها را برمی دارند و این که به هم نشان می دهند یا خیر) پس احتمال این که عدد روژینا وسطی باشد، $\frac{1}{3}$ است.

۴۰۲. گزینه ۴؛

$$PB = BC \Rightarrow S_{\triangle PEB} = S_{\triangle ADE} \Rightarrow S_{ABCD} = S_{\triangle PDC} = 16$$

$$\frac{MC}{DM} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{MC}{DC} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{S_{\triangle PMC}}{S_{\triangle PDC}} = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{\triangle PMC} = \frac{S_{\triangle PDC}}{4} = 4$$

۴۰۳. گزینه ۲؛ اگر $(a, b) = d$ باشد، آن گاه $[a, b]$ بر d بخش پذیر است، پس سمت چپ تساوی بر d بخش پذیر است، ولی ۷۳ اول است، پس $d = 1$.

$$d = 1 \Rightarrow (a, b) = 1 \Rightarrow [a, b] = ab$$

$$(a, b) + [a, b] = 73 \Rightarrow 1 + ab = 73 \Rightarrow ab = 72 = 3^2 \times 2^3$$

a و b دو عدد نسبت به هم اول اند که حاصل ضربشان $3^2 \times 2^3$ است، به وضوح یکی از آنها 2^3 و دیگری 3^2 است. پس:

$$a + b = 2^3 + 3^2 = 17$$

۴۰۴. گزینه ۲؛ با کمی دقت متوجه می‌شویم که مخرج این کسر یک واحد کم‌تر از دو برابر صورت کسر است، پس هیچ‌گاه $\frac{1}{2}$ حاصل نمی‌شود.

۴۰۵. گزینه ۳؛

$$\left. \begin{aligned} 1+3+5+\dots+2n-1 &= n^2 \\ n^2 &= \overline{aba} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \overline{aba} = 121 \text{ یا } 484 \text{ یا } 676$$

۴۰۶. گزینه ۲؛

$$\sqrt{1000000} \cong 316/22 \quad \sqrt{100000000} = 10000$$

بنابراین باید به دنبال اعدادی مانند n بگردیم که $316 < 7n < 10000$

$$7n = 322, \dots, 994 \Rightarrow n = 46, 47, \dots, 142$$

$$\text{تعداد} = 142 - 46 + 1 = 97$$

۴۰۷. گزینه ۴؛ برای این که سه عدد متوالی بر ۳ بخش پذیر باشند، باید باقی‌مانده آن‌ها بر ۳ متفاوت باشد. اعداد ۱، ۴ و ۷ باید در جاهایی باشند که با \bigcirc مشخص شده‌اند که این کار به $6 = 3 \times 2 \times 1$ طریق قابل انجام است.

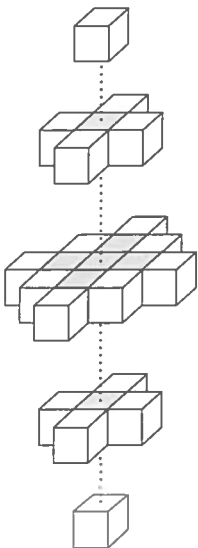
$$\overline{\bigcirc \Delta} \overline{\bigcirc \Delta} \overline{\bigcirc \Delta} \overline{\bigcirc \Delta} \overline{\bigcirc \Delta}$$

۲ و ۵ یا ۳ و ۶ باید در خانه‌هایی باشند که با Δ مشخص شده است.

$$6 \times 2 \times 2 \times 2 = 48$$

۴۰۸. گزینه ۴؛ دقت کنید که به‌ازای هر a, b, c, d و e ، مجموع پنج عدد برابر با ۰ است. پس همه آن‌ها نمی‌توانند منفی باشند، حال به‌ازای $a=1, b=4, c=2, d=5$ و $e=3$ حاصل چهار تا از آن‌ها منفی می‌شود.

۴۰۹. گزینه ۲؛ حجم موردنظر از ۵ لایه مکعب، مطابق شکل ساخته شده که مکعب‌های تیره آن‌هایی هستند که به هر ۶ وجه آن‌ها مکعبی دیگر چسبیده و در نتیجه هیچ وجهی از آن‌ها رنگی نمی‌شود.



۴۱۰. گزینه ۳؛ تعداد اعداد یک رقمی، ۶ تا است. دورقمی‌ها ۳۰ تا است. سه رقمی‌ها ۱۲۰ تا است. چهاررقمی‌ها ۳۶۰ تا است. پنج رقمی‌ها ۷۲۰ تا است. شش رقمی‌ها ۷۲۰ تا است.

$$۶ + ۳۰ + ۱۲۰ + ۳۶۰ + ۷۲۰ = ۱۲۳۶$$

پس ۱۰۰۰ امین عدد پنج رقمی است. تا ۵۱۶ امین عدد یک، دو، سه یا چهاررقمی‌ها را نوشته‌ایم. پس ۴۸۴ امین عدد ۵ رقمی را باید بنویسیم.

$$۱ abcd \rightarrow ۱۲۰ \text{ تا}$$

$$۲ abcd \rightarrow ۱۲۰ \text{ تا}$$

$$۳ abcd \rightarrow ۱۲۰ \text{ تا}$$

$$۴ abcd \rightarrow ۱۲۰ \text{ تا}$$

پس چهارمین عدد پنج رقمی را پیدا می‌کنیم که رقم سمت چپ آن ۵ باشد:

$$۵۱۲۳۴, ۵۱۲۳۶, ۵۱۲۴۳, ۵۱۲۴۶$$

۴۱۱. گزینه ۲؛ فرض می‌کنیم $d = (a, b, c)$ باشد. واضح است که d مقسوم‌علیه ۷۰۰ است. حال مقسوم‌علیه‌های ۷۰۰ را از بزرگ به کوچک می‌نویسیم:

$$۷۰۰, \frac{۷۰۰}{۲} = ۳۵۰, \frac{۷۰۰}{۴} = ۱۷۵, \frac{۷۰۰}{۵} = ۱۴۰, \frac{۷۰۰}{۷} = ۱۰۰, \dots$$

حال فرض می‌کنیم $a = de$, $b = df$ و $c = dg$ باشد.

به وضوح $d = ۷۰۰$ جواب نیست. اگر $d = ۳۵۰$ باشد، آن‌گاه:

$$a + b + c = ۳۵۰(e + f + g) \Rightarrow e + f + g = ۲ \Rightarrow \text{غ ق ق}$$

$$a + b + c = ۱۷۵(e + f + g) \Rightarrow e + f + g = ۴ \Rightarrow \text{غ ق ق}$$

اگر $d = ۱۷۵$ باشد، آن‌گاه:

$$a + b + c = ۱۴۰(e + f + g) \Rightarrow e + f + g = ۵ \Rightarrow \text{غ ق ق}$$

اگر $d = ۱۴۰$ باشد، آن‌گاه:

$$a + b + c = ۱۰۰(e + f + g) \Rightarrow e + f + g = ۷ \Rightarrow e = ۱, f = ۲, g = ۴$$

اگر $d = ۱۰۰$ باشد، آن‌گاه:

دقت کنید که دلیل غ ق ق بودن سه مورد ابتدایی، غیر متمایز بودن e , f و g است.

۴۱۲. گزینه ۴؛

$$\frac{a \times b}{a + b} = \frac{۱}{\frac{۱}{a} + \frac{۱}{b}}$$

بعد از ۹ مرحله، یک کارت با مقدار $\frac{۱}{\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲^۲} + \frac{۱}{۲^۳} - \dots - \frac{۱}{۲^{۱۰}}}$ باقی می‌ماند که حاصل آن $\frac{۱۰۲۴}{۳۴۱}$ است.

۴۱۳. گزینه ۴؛ بیشترین تعداد تیمی که می‌توان با ۴ نفر ساخت، به شرط این‌که هر تیم حداقل یک عضو را داشته باشد، ۱۵ تیم است.

زیرا هر بازیکن می‌تواند در هر تیم باشد یا نباشد، یعنی ۲ حالت دارد، پس در کل می‌شود $۲^۴ = ۱۶$ تیم، ولی با این روش شمارش، تیمی را هم که هیچ عضوی ندارد، شمردیم که اگر آن را کم کنیم، ۱۵ تیم می‌شود.

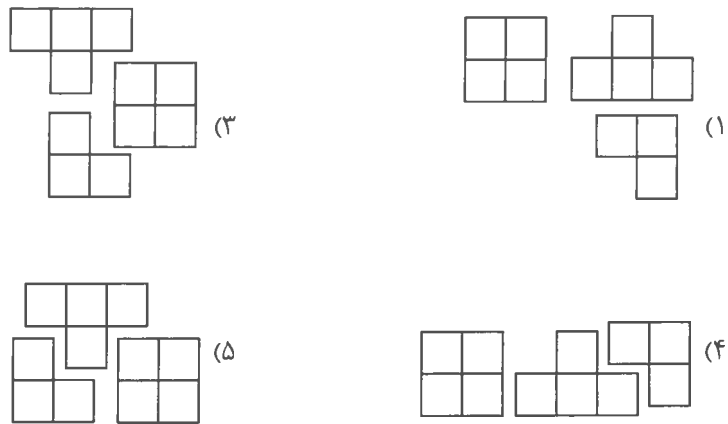
۴۱۴. گزینه ۵؛ a در آن تیم وجود دارد و d وجود ندارد، پس برای هر کدام از افراد a، b، c و e دو حالت وجود دارد که یا در آن تیم هستند و یا نیستند، در نتیجه تعداد کل حالات برابر است با:

$$2 \times 2 \times 2 = 8$$

۴۱۵. گزینه ۵؛ جدول تیمی کامل که با ۱۰ نفر می‌توان ساخت، دارای $2^{10} - 1$ یعنی ۱۰۲۳ ستون است. هر ترکیب از انتخاب ستون‌های جدول تیمی کامل، یک جدول جدید می‌دهد.

به عبارت دیگر، هر ستون می‌تواند در جدول تیمی ما باشد یا نباشد، پس در مجموع $2^{10} = 2^{10}$ جدول می‌توان ساخت که یک حالت قابل قبول نیست و آن حالتی است که هیچ ستونی انتخاب نشود.

۴۱۶. گزینه ۲؛ شکل‌های گزینه‌های ۱، ۳، ۴ و ۵ را می‌توان ساخت:

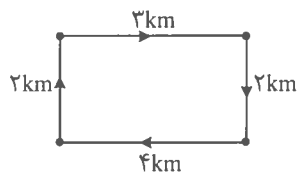


موضوع	زیر موضوع
هندسه	کاشی‌کاری

۴۱۷. گزینه ۴؛ پاسخ برابر با عبارت $(2a + b + 4)^3$ است.

موضوع	زیر موضوع
جبر	ساده کردن عبارات جبری

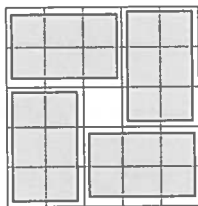
۴۱۸. گزینه ۵؛



$$\text{طول کوتاه‌ترین دور} = 2\text{km} + 3\text{km} + 2\text{km} + 4\text{km} = 11\text{km}$$

موضوع	زیر موضوع
خلاقیت	منطق

۴۱۹. گزینه ۲؛ فقط مربع وسط شکل می‌تواند خالی بماند.



موضوع	زیر موضوع
هندسه	کاشی‌کاری

۴۲۰. گزینه ۳؛ بر طبق جملات دوم و سوم، مهدی و خسرو نمی‌توانند قهرمان باشند. پس امتیاز نرگس و شیما برابر شده است.

$$\begin{cases} S = 2M \\ N = 50 + M \end{cases} \xrightarrow{S=N} 2M = 50 + M \Rightarrow M = 50$$

امتیاز شیما: S

امتیاز نرگس: N

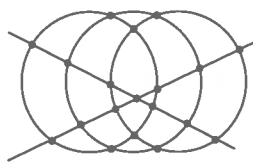
امتیاز مهدی: M

پس جدول امتیازات به صورت زیر است:

مجموع	مهدی	خسرو	نرگس	شیما
۳۲۰	۵۰	۷۰	۱۰۰	۱۰۰

موضوع	زیر موضوع
خلاقیت	منطق

۴۲۱. گزینه ۳؛ مطابق شکل حداکثر ۱۹ نقطه تلاقی می‌توانند داشته باشند.



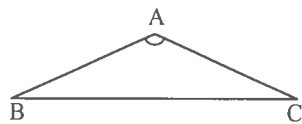
موضوع	زیر موضوع
راهبردهای مسئله	رسم شکل

۴۲۲. گزینه ۵؛

(۱, ۳, ۵, ۷), (۱, ۳, ۵, ۸), (۱, ۳, ۶, ۸), (۱, ۴, ۶, ۸), (۲, ۴, ۶, ۸)

موضوع	زیر موضوع
راهبردهای حل مسئله	تفکر نظام‌دار

۴۲۳. گزینه ۱؛ می‌دانیم در هر مثلث، اگر دو ضلع نابرابر داشته باشیم، زاویه روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از زاویه روبه‌رو به ضلع کوچک‌تر (و بالعکس). مثلاً به این شکل نگاه کنید:



واضح است که بزرگ‌ترین زاویه یعنی A روبه‌روی بزرگ‌ترین ضلع یعنی BC است. پس در شکل صورت سؤال داریم:

$$1398 > 1397 > 1396 \Rightarrow \hat{A} > \hat{B} > \hat{C}$$

موضوع	زیر موضوع
هندسه	مثلث

۴۲۴. گزینه ۳؛ اگر طول بزرگ‌ترین مداد ۱۴ سانتی‌متر باشد، مجموع طول مدادها حداکثر برابر است با:

$$5 + 6 + 7 + \dots + 14 = 95$$

بنابراین طول بزرگ‌ترین مداد حداقل ۱۵ سانتی‌متر است. به عنوان مثال طول‌ها را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$1 + 6 + 7 + 8 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 = 97$$

موضوع	زیر موضوع
راهبردهای حل مسئله	آزمایش و خطا

۴۲۵. گزینه ۴؛ اگر از کوچک به بزرگ شروع کنیم داریم:

$$235 \rightarrow \text{بر } 5 \text{ بخش‌پذیر و مرکب}$$

$$237 \rightarrow \text{بر } 3 \text{ بخش‌پذیر و مرکب}$$

$$253 \rightarrow \text{بر } 11 \text{ بخش‌پذیر و مرکب}$$

$$257 \rightarrow \text{اول است} \Rightarrow 2 + 5 + 7 = 14$$

موضوع	زیر موضوع
نظریه اعداد	اعداد اول

۴۲۶. گزینه ۴؛

$$x \otimes y = \frac{y-x}{xy} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$$

$$(1398 \otimes 1399) + (1399 \otimes 1400) + \dots + (2018 \otimes 2019) =$$

$$\frac{1}{1398} - \frac{1}{1399} + \frac{1}{1399} - \frac{1}{1400} + \dots + \frac{1}{2018} - \frac{1}{2019} = \frac{1}{1398} - \frac{1}{2019} = 1398 \otimes 2019$$

موضوع	زیر موضوع
جبر	گویا

۴۲۷. گزینه ۱؛ فقط یک حالت وجود دارد و آن هم به صورت زیر است.

۱, ۲, ۲۲, ۲۳, ۲۴, ۲۵

موضوع	زیر موضوع
خلاقیت	منطق

۴۲۸. گزینه ۵؛ یک عدد آبی باید به گونه‌ای باشد که هر رقم از رقم سمت چپ خود کم‌تر نباشد. پس فقط گزینه ۵ چنین ویژگی را دارد.

۱۱۳۵۷۷ → abbaabaabaabb

موضوع	زیر موضوع
راهبردهای حل مسئله	الگویابی

۴۲۹. گزینه ۱؛

$$a + b + 1 = b + c - 2 \Rightarrow a + 3 = c \Rightarrow a < c$$

$$b + c - 2 = c + d + 3 \Rightarrow b = d + 5 \Rightarrow b > d$$

$$c + d + 3 = d + e - 4 \Rightarrow c + 7 = e \Rightarrow c < e$$

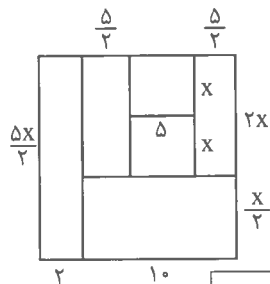
$$d + e - 4 = e + a + 5 \Rightarrow d = a + 9 \Rightarrow d > a$$

$$e + a + 5 = a + b + 1 \Rightarrow e + 4 = b \Rightarrow e < b$$

از نامساوی‌های فوق نتیجه می‌شود که $a < c < e < b$ و $a < d < b$ ، پس کوچک‌ترین عدد a است.

موضوع	زیر موضوع
جبر	معادله

۴۳۰. گزینه ۴؛ فرض می‌کنیم $BC = x$ ، پس مساحت هر مستطیل $5x$ است. بقیه ضلع‌ها را مطابق شکل مشخص می‌کنیم.



$$\frac{5x}{2} = 12 \Rightarrow x = \frac{24}{5}$$

موضوع	زیر موضوع
جبر	معادله

۴۳۱. گزینه ۱؛

$$A = 6 + 12 + 18 + 24 + 30 + \dots + 294 = \frac{49(6 + 294)}{2} = 49 \times 150 = 7350$$

$$B = 24 + 48 + 72 + \dots + 288 = \frac{12 \times (24 + 288)}{2} = 1872$$

$$A - B = 7350 - 1872 = 5478$$

موضوع	زیر موضوع
نظریه اعداد	بخش پذیری

۴۳۲. گزینه ۳؛

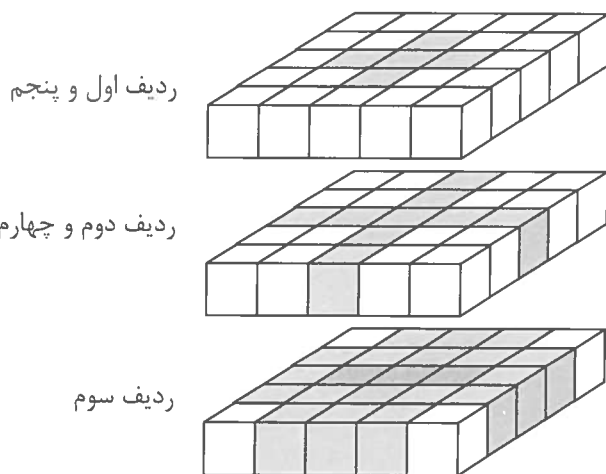
$8 = 1 \times 2 \times 4$ $18 = 2 \times 3 \times 3$ $12 = 2 \times 2 \times 3$ $24 = 2 \times 3 \times 4$

موضوع	زیر موضوع
هندسه	احجام هندسی

۴۳۳. گزینه ۲؛ در مرحله اول در هر کفه ترازو دو سکه قرار می‌دهیم. اگر نابرابر شدند. یعنی ۴ سکه دیگر سالم هستند. در مرحله دوم ۲ سکه سالم را با ۲ سکه سمت سبک مرحله اول مقایسه می‌کنیم. اگر برابر شدند، یعنی سکه‌های سمت سبک سالم بودند، و در نتیجه سکه تقلبی سنگین‌تر از بقیه است. اگر برابر نشدند، سکه تقلبی سبک‌تر از بقیه است. اما اگر پس از مرحله اول دو کفه برابر شدند، یعنی سکه تقلبی در بین ۴ سکه دیگر قرار دارد و سکه‌های فعلی روی ترازو همگی سالم‌اند. کافی است این ۴ سکه سالم را همگی در یک کفه و ۴ سکه دیگر را روی کفه دیگر قرار دهیم تا بفهمیم سکه تقلبی سنگین‌تر است یا سبک‌تر.

موضوع	زیر موضوع
خلاقیت	منطق

۴۳۴. گزینه ۲؛



سعی کنید هر ردیف را به صورت مجزا تصور کنید. حداکثر مکعب‌های باقی‌مانده در شکل برابر است با:

$20 + 16 + 4 + 16 + 20 = 76$

موضوع	زیر موضوع
هندسه	تجسم فضایی

۴۳۵. گزینه ۲؛ به نقش اعداد ۱, ۵, ۹, ۱۳ و ... توجه کنید. باقی‌مانده تقسیم این اعداد بر ۴ برابر با ۱ است. عدد ۹۷ نیز چنین است.

	۹۶	۹۷	۹۸	۹۹	۱۰۰
:	:	:	:	:	:
	۱۳۹۶	۱۳۹۷	۱۳۹۸	۱۳۹۹	۱۴۰۰

موضوع	زیر موضوع
راهبردهای حل مسئله	الگویی

۴۳۶. گزینه ۳؛ ناحیه تیره دو قسمت است، یکی ربع دایره اصلی و یکی نیم‌دایره‌ای به قطر نصف دایره اصلی.

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8} = \frac{37}{5}\%$$

۴۳۷. گزینه ۳؛ بیش‌ترین تعداد گوسفندها در حالتی است که ۲۲ حیوان در مزرعه باشند به صورتی که توزیع آن‌ها به صورت زیر باشد:

۱۹ گوسفند، ۱ شترمرغ، ۲ گاو

۴۳۸. گزینه ۵؛

$$\begin{array}{r} \text{.....ba} \\ \times \quad 2 \\ \hline \text{.....ba2} \end{array}$$

برای مقدار ۲a حالت داریم:

حالت اول: a = ۱ که برای b مقداری وجود ندارد چون رقم یکان ۲ × b باید ۱ باشد.

$$\begin{array}{r} \text{.....b1} \\ \times \quad 2 \\ \hline \text{.....b12} \end{array}$$

حالت دوم: a = ۶ در این حالت هم برای b مقداری وجود ندارد چون رقم یکان ۲ × b باید ۵ باشد.

$$\begin{array}{r} \text{.....b6} \\ \times \quad 2 \\ \hline \text{.....b62} \end{array}$$

۴۳۹. گزینه ۳؛ اگر n شماره لامپ باشد، آن‌گاه:

- اگر باقی‌مانده n بر ۴ برابر با ۱ یا ۲ باشد، لامپ روشن می‌ماند.

- اگر باقی‌مانده n بر ۴ برابر با صفر یا ۳ باشد، لامپ خاموش می‌ماند.

بنابراین لامپ ۷۴ روشن می‌ماند.

۴۴۰. گزینه ۳؛ چنان‌چه از نمای بالا شکل را ببینیم و تعداد مکعب‌های هر کدام را بنویسیم به یکی از ۶ حالت زیر امکان‌پذیر است.

۳	۱	۱	۳	۱	۱	۱	۳	۱
۱	۳	۱	۱	۱	۳	۳	۱	۱
۱	۱	۳	۱	۳	۱	۱	۱	۳
۱	۱	۳	۱	۱	۳	۱	۳	۱
۳	۱	۱	۱	۳	۱	۱	۱	۳
۱	۳	۱	۳	۱	۱	۳	۱	۱

۴۴۱. گزینه ۳؛ می‌دانیم $GB = \frac{2BB'}{3}$ و $GC = \frac{2CC'}{3}$

$$\xrightarrow{\Delta BGC'} C'G^2 + BG^2 = BC'^2 \Rightarrow \left(\frac{CC'}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}BB'\right)^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2$$

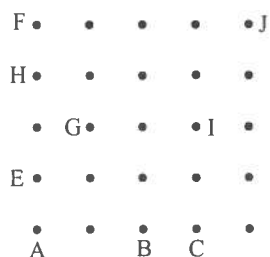
$$\xrightarrow{\Delta B'GC} B'G^2 + CG^2 = B'C^2 \Rightarrow \left(\frac{BB'}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}CC'\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

از جمع زدن روابط فوق داریم $\frac{5}{9}(BB'^2 + CC'^2) = \frac{b^2 + c^2}{4}$

$$\xrightarrow{\Delta BGC} BG^2 + CG^2 = BC^2 \Rightarrow \frac{4}{9}(BB'^2 + CC'^2) = a^2$$

$$\Rightarrow \frac{4}{9} \left(\frac{9(b^2 + c^2)}{5 \times 4} \right) = a^2 \Rightarrow a^2 = \frac{b^2 + c^2}{5}$$

۴۴۲. گزینه ۲؛ مسئله را در ۴ حالت بررسی می‌کنیم:



- تشکیل یک خط افقی بدهند، مانند $ABC: 5 \times 1 = 5$

- تشکیل یک خط عمودی بدهند، مانند $AEF: 5 \times 1 = 5$

- تشکیل یک خط موازی با قطر اصلی، مانند $CGH: 2(1+4+1) = 10$

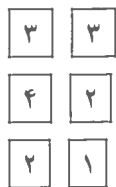
- تشکیل یک خطی بدهند که قطر یک مستطیل 2×4 باشد، مانند $BIJ: 4 \times 3 = 12$

پاسخ می‌شود: $5 + 5 + 10 + 12 = 32$

۴۴۳. گزینه ۱؛

مکعب	$2(x+y)$	$2(x+z)$	$2(y+z)$	$x+y+z$	x	y	z	xyz
A	۱۲	۱۶	۲۰	۱۲	۲	۴	۶	۴۸
B	۱۲	۱۶	۲۴	۱۳	۱	۵	۷	۳۵

۴۴۴. گزینه ۳؛ در این جمع ۳ زن و ۳ مرد وجود دارد. برای راننده ۳ انتخاب داریم. در کنار راننده یکی از ۳ نفری که جنسیت مخالف راننده هستند می‌تواند قرار بگیرند. حال به سراغ ردیف‌های بعد می‌رویم.



$$3 \times 3 \times 4 \times 2 \times 2 \times 1 = 144$$

۴۴۵. گزینه ۴؛ در هر بخش $4 \times 4 \times 1$ شکل، می‌توان به ۱۶ حالت این شکل را جدا کرد. از طرفی ۱۲ بخش $4 \times 4 \times 1$ در شکل دیده

$$16 \times 12 = 192$$

می‌شود پس تعداد حالات برابر است با:

۴۴۶. گزینه ۳؛ اعداد را به ۱۴ گروه ۷ تایی و یک گروه دوتایی تقسیم می‌کنیم:

$$\{1, 2, \dots, 7\} \cup \{8, 9, \dots, 14\} \cup \{92, \dots, 98\} \cup \{99, 100\}$$

ثابت می‌کنیم با برداشتن ۳۰ گوی ممکن است به هدفمان برسیم. اگر از هر گروه دو عدد کوچک‌تر را برداریم در مجموع ۳۰ گوی برداشته‌ایم ولی سه عدد با ویژگی خواسته شده در بین آن‌ها وجود ندارد ولی با ۳۱ گوی حتماً به هدفمان می‌رسیم.

۴۴۷. گزینه ۲؛ هر بار هر تعداد سکه را می‌توان به سه دسته تقسیم کرد و دو تا از آن‌ها را (که تعداد سکه‌هایشان مساوی است) با هم مقایسه کرد. اگر وزن یک کفه کم‌تر شد، سکه تقلبی در آن دسته است. اگر مساوی شدند، سکه تقلبی در دسته سوم است. پس اگر تعداد سکه‌ها ۳ تا باشد به ۱ بار استفاده از ترازو نیاز داریم. اگر $3^2 = 9$ (یا کم‌تر) باشد به ۲ بار، اگر $3^3 = 27$ (یا کم‌تر) باشد به ۳ بار، اگر $3^4 = 81$ (یا کم‌تر) به ۴ بار، اگر $3^5 = 243$ (یا کم‌تر) باشد به ۵ بار و ... استفاده از ترازو نیاز داریم.

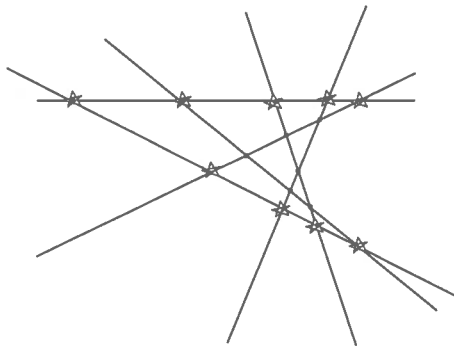
۴۴۸. گزینه ۵؛

$$(\sqrt{2}x + x^2)^{100} \left(\frac{1}{x} + x + \dots + x^{99}\right)^{100} = (\sqrt{2} + x)^{100} \times x^{100} \times \left(\frac{1}{x} + x + \dots + x^{99}\right)^{100}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{2} + x)^{100} \times (1 + x^2 + \dots + x^{198})^{100} \Rightarrow \text{عدد ثابت} = \sqrt{2}^{100} = 2^{50}$$

۴۴۹. گزینه ۲؛ اگر اعداد بالای جدول ۱، ۲^۱، ۲^۲، ...، ۲^۷ و اعداد کنار جدول هم ۱، ۲، ۲^۲، ...، ۲^۷ باشد اعداد واقع در جدول از ۱، ۲^۱ تا ۲^{۱۴} خواهند بود که ۱۵ عدد مختلف خواهند بود. حال ثابت می‌کنیم کم‌تر از ۱۵ امکان‌پذیر نیست. اگر اعداد بالای جدول را از چپ به راست به صورت صعودی و اعداد کنار جدول را از هم از بالا به پایین صعودی مرتب کنیم اعداد سطر اول و به دنبال آن‌ها اعداد ستون هشتم جدول صعودی و متمایزند بنابراین حداقل ۱۵ عدد متمایز داریم.

۴۵۰. گزینه ۴؛



۴۵۱. گزینه ۵؛

$$N = (\overline{aba})^2 \Rightarrow \overline{cdefg} = (\overline{aba})^2$$

$\overline{aba} = 101, 131, 151, 181, 313$ فرد است $\Rightarrow \overline{aba}$ اول است.

دقت کنید 323^2 عددی شش رقمی است.

$$\overline{aba} = 101 \Rightarrow N = 101^2 = 10201 \text{ غ ق ق}$$

$$\overline{aba} = 131 \Rightarrow N = 131^2 = 17161 \text{ غ ق ق}$$

$$\overline{aba} = 151 \Rightarrow N = 151^2 = 22801 \text{ غ ق ق}$$

$$\overline{aba} = 313 \Rightarrow N = 313^2 = 97969 \text{ غ ق ق}$$

$$\overline{aba} = 181 \Rightarrow N = 181^2 = 32761 \text{ جواب است}$$

۴۵۲. گزینه ۱؛ درون هر مربع 1×1 ، تعداد مستطیل‌هایی که آن مربع در آن‌ها دیده می‌شود را می‌نویسیم:

۲۴	۴۰	۴۸	۴۸	۴۰	۲۴
۳۶	۶۰	۷۲	۷۲	۶۰	۳۶
۳۶	۶۰	۷۲	۷۲	۶۰	۳۶
۲۴	۴۰	۴۸	۴۸	۴۰	۲۴

مجموع کل اعداد می‌شود ۱۱۲۰.

۴۵۳. گزینه ۴؛ در گزینه ۱ تعداد سفیدها و سیاه‌ها برابر نیست، در گزینه ۲، بازی بعد از حرکت دوم و در گزینه ۳ بازی بعد از حرکت ششم باید تمام شود.

۴۵۴. گزینه ۵؛ اگر اولین گوی سفید باشد حتماً برنده می‌شویم و آخرین گوی باید سیاه باشد. از طرفی وارون این دنباله هم یک دنباله بُرد است. بنابراین احتمال پیروزی برابر است با:

$$\frac{2W}{W+B} = \frac{1}{2} \Rightarrow 4W = W+B \Rightarrow B=3W, W+B=20 \Rightarrow W=5, B=20.$$

۴۵۵. گزینه ۳؛ اگر اولین گوی سفید باشد و برنده شویم آخرین گوی باید سیاه باشد چون در غیر این صورت بازی باید قبلاً به پایان می‌رسید و هم‌چنین اگر اولین گوی سیاه باشد و برنده باشیم آخرین گوی (آخرین حرکت) باید سفید باشد.

دوره
المپیاد

ریاضی

نوجوانان ایران
مبتکران



ویژه
دانش آموزان المپیادی

ششم / هفتم / هشتم / نهم

دفتر مرکزی: تهران، خیابان فخر رازی، خیابان وحید نظری شرقی، پلاک ۵۹ شرکت آموزشی فرهنگی و انتشاراتی مبتکران

ISBN:978-964-07-2469-9




9 789640 724699

 mobtakeran.com

 mobedu.ir

  @mobtakeranolam

 ۰۲۱-۶۱۰۹۴۰۰۰

 ۰۲۱-۶۱۰۹۴۸۷۳

 ۰۲۱-۶۱۰۹۴۲۰۱

دفتر مرکزی

فروش کتاب

دبیر خانه المپیاد نوجوانان ایران